

### Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Popovici, C.:** Sur la nécessité d'introduire une nouvelle notion concernant le discontinu. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 234—236 (1933).

L'auteur appelle toute fonction, qui est non bornée au voisinage d'un point  $x_0$ , fonction de classe  $A$  ou fonction non bornée simplement dans  $x_0$ , s'il n'est pas possible de trouver pour tout point  $\zeta$  du voisinage un nombre  $N(\zeta)$  tel que  $f(\zeta) < N(\zeta)$ ; dans le cas contraire la fonction est dite de classe  $B$  ou fonction non bornée et déterminée dans  $x_0$ . Il fait les mêmes distinctions pour les fonctions non bornées dans un domaine. En outre il distingue la classe des fonctions bornées et discontinues tout simplement de la classe des fonctions bornées et discontinues, mais déterminées. J. Ridder.

**Ridder, J.:** Zwei Sätze bei approximativ stetigen Funktionen. Nieuw Arch. Wiskde 17, 276—280 (1932).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung der Begriffe der approximativen Stetigkeit und der approximativen Derivierten und beweist, daß bei dieser Verallgemeinerung der folgende Satz erhalten bleibt: wenn die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in  $(a, b)$  approximativ stetig (im neuen, abgeänderten Sinne) sind und ihre rechten approximativen Ableitungen (ebenfalls im abgeänderten Sinne) höchstens auf einer abzählbaren Menge verschieden sind, so unterscheiden sich diese Funktionen nur um eine Konstante.

A. Kolmogoroff (Moskau).

**Saks, S.:** On the surfaces without tangent planes. Ann. of Math., II. s. 34, 114—124 (1933).

Der Verf. beweist die Existenz stetiger Funktionen  $f(x, y)$  von zwei Veränderlichen, die auf jeder geraden Strecke des Einheitsquadrats totalstetig und von totaler Variation  $< 1$  sind, so daß die Fläche  $z = f(x, y)$  in keinem Punkte eine Tangentialebene besitzt. Es werden zuerst die Elemente der Konstruktion einer Funktion gegeben, für welche ein Differenzenquotient in jeder Richtung  $> n^{\frac{1}{2}}$  ausfällt ( $n$  beliebig groß); die Funktion ohne Tangentialebene selbst wird nicht konstruiert, sondern ein Beweis gegeben, daß die Menge solcher Funktionen in einem gewissen Funktionalraume von 2. Kategorie ist. — Es scheint dem Verf. die Arbeit des Ref. unbekannt geblieben zu sein [Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale. Rec. math. Soc. math. Moscou 32, 511—528 (1925)], in welcher ein Beispiel der in keinem Punkte total differenzierbaren und im Tonellischen Sinne totalstetigen Funktion konstruiert worden ist. W. Stepanoff (Moskau).

**Malechir, Henri:** Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 2, 1—8 (1932).

The author establishes several elementary theorems concerning transfinite sequences (of type  $\Omega$ ) of functions; for instance: the limit of a converging transfinite sequence of upper semicontinuous functions is a function of the same kind. Saks (Warszawa).

**Bureau, Florent:** Sur l'approximation des fonctions de classe  $\alpha$ . Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 2, 1—17 (1932).

This paper contains a number of properties of functions  $F^\alpha$  and  $f^\alpha$  which denote finite functions that are respectively the limits of monotone non-increasing and non-decreasing sequences of functions of Baire's class  $< \alpha$ . For instance: Th. 5: In order that a finite function of class  $\alpha$  should be representable by means of an absolutely converging series of functions of class  $< \alpha$  it is necessary and sufficient that it is the difference of two functions  $F^\gamma$  ( $\gamma \leq \alpha$ ) one at least of which is an  $F^\alpha$ ; Th. 6: If  $\varphi(x)$  and  $\psi(x)$  are respectively the limits of a non-decreasing sequence of functions  $F^\sigma$  and



of a non-increasing sequence of functions  $f^\sigma$  ( $\sigma \leq \alpha$ ), and if  $\varphi(x) > \psi(x)$  then there exists a function  $f(x)$  which is the difference of two functions  $F^\gamma$  ( $\gamma \leq \alpha$ ) and satisfies the inequality  $\varphi(x) \geq f(x) \geq \psi(x)$ ; Th. 8: If  $f(x)$  is of class  $\alpha$  of Baire then for any given  $\varepsilon > 0$  there exists a function which is the difference of two functions  $F^\gamma$  ( $\gamma \leq \alpha$ ) and differs from  $f(x)$  by less than  $\varepsilon$ . — The author refers to methods developed in papers by Sierpiński, Mazurkiewicz, Kempisty [Fundam. Math. 2, 15—27, 37—40, 28—36, 131—135 (1921)] and De la Vallée-Poussin [Intégrales de Lebesgue etc. Coll. Borel (1916)] where the above theorems have been established for the case  $\alpha = 1$ . In this connection the book of Hausdorff [Mengenlehre (1927), Kap. IX] and a recent paper by Sierpiński [Fundam. Math. 18, 1—22 (1932); see this Zbl. 4, 294 (1932)] may be mentioned also. We shall remark that the results of Bureau may be stated in the same general and abstract form as those of Hausdorff and Sierpiński.

Saks (Warszawa).

**Kolmogoroff, A.: Beiträge zur Maßtheorie.** Math. Ann. 107, 351—366 (1932).

Let  $\Pi(x)$  be a continuous function mapping a pointset  $E$  in Euclidean  $n$ -dimensional space  $R^n$  on its image  $E' = \Pi(E)$ . In the terminology of E. Schmidt,  $E$  is mapped on  $E'$  without stretching (dehnungslos) if the distance between two points of  $E$  is not less than the distance of their images in  $E'$ . A non-negative set function  $\mu(E)$  defined for all A-sets of  $R^n$  is a measure function if it satisfies the following four conditions: I.  $E \subset \sum E_m \rightarrow \mu(E) \leq \sum \mu(E_m)$ ; II.  $E_i \subset E, E_i E_j = 0, i \neq j \rightarrow \sum \mu(E_m) \leq \mu(E)$ ; III.  $E' = \Pi(E) \rightarrow \mu(E') \leq \mu(E)$ ; IV. For some set  $J$ , the mass unit,  $\mu(J) = 1$ . It follows from conditions I and II that  $\mu(E)$  is additive and from III that if  $E'$  and  $E''$  are congruent then  $\mu(E') = \mu(E'')$ . If the mass unit  $J$  is the unit cube  $J^k$ ,  $\mu(E)$  is termed the  $k$ -dimensional measure of  $E$  and denoted by  $\mu^k(E)$ . For  $k = n$ , the Lebesgue measure  $m^k(E)$  is equal to  $\mu^k(E)$  for all A-sets in  $k$ -dimensional space  $R^k$ . The maximal measure  $\bar{\mu}^k(E)$  is the lower bound of the Lebesgue measures of all A-sets lying in  $R^k$  which can be mapped on  $E$  without stretching. If no such sets exist,  $\bar{\mu}^k(E) = +\infty$ . The minimal measure  $\underline{\mu}^k(E)$  is the upper bound of  $\sum m^k \Pi_i(G_i)$  for all possible enumerable sequences  $G_i$  satisfying the conditions  $G_i \subset E, G_i G_j = 0, i \neq j$ . Both functions are measure functions and  $\bar{\mu}^k(E) \geq \mu^k(E) \geq \underline{\mu}^k(E)$ . If  $i < k; \mu^k(E) > 0 \rightarrow \underline{\mu}^i(E) = +\infty, \bar{\mu}^k(E) > 0 \rightarrow \bar{\mu}^i = +\infty$ . For every simple Jordan arc  $S, \underline{\mu}^1(S) = \bar{\mu}^1(S) = L(S)$ , the length of  $S$ . For every continuum  $K$ , in  $R^n, \underline{\mu}^1(K) = \bar{\mu}^1(K)$ . These set functions are defined for all metric A-sets and possess in this new region all previously formulated properties. In particular the results regarding arc length and the linear measure of continua extend to general metric spaces. The author presents an unpublished definition of measure for metric spaces due to Urysohn. The maximal and minimal measures  $\bar{\mu}^k, \underline{\mu}^k$ , of  $E$  are equal for all sets in  $R^n$  which are the images without stretching of A-sets in  $R^k$ . It follows that  $\bar{\mu}^k(E) > \underline{\mu}^k(E)$  only if  $\bar{\mu}^k(E) = +\infty$ . These set-functions coincide with the surface area of surfaces rectifiable in the Lebesgue sense, and with the surface measure of sets on rectifiable  $k$ -dimensional surfaces as defined by Rademacher, Math. Ann. 81, 54. The article concludes with a new definition of the measure of linear sets.

E. W. Chittenden (Iowa).

**Feller, Willy: Allgemeine Maßtheorie und Lebesguesche Integration.** S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 27, 459—472 (1932).

Der hier gegebene Aufbau hat zwei Vorteile gegenüber dem üblichen: 1. Er benutzt nicht die Geometrie der Mengen, die aus endlich vielen Intervallen bestehen, und ist daher nicht an die Euklidizität des Raumes gebunden. 2. Er liefert zugleich die Lebesgue-Stieltjes-Integrale. Ein Intervall der reellen Achse heiße halboffen, wenn der linke Endpunkt dazu gehört, der rechte nicht. Um zur Maßtheorie auf einem halboffenen Intervall  $J$  zu gelangen, denke man sich auf  $J$  eine Folge halboffener Intervalle  $i_\nu$  derart, daß 1. für zwei bel. Intervalle  $i_\nu$  und  $i_\mu$  eine der Beziehungen  $i_\nu \cdot i_\mu = 0$ ,



$i_\nu \subset i_\mu$ ,  $i_\nu \supset i_\mu$  statthat, 2. sich auf jeden Punkt von  $J$  eine Teilfolge der  $i_\nu$  zusammenzieht. Den  $i_\nu$  ordne man irgendwelche nichtnegative Zahlen  $|i_\nu|$  zu mit folgenden Eigenschaften: I. Ist  $i_\nu \cdot i_\mu = 0$ ,  $i_j = i_\nu + i_\mu$ , so  $|i_j| = |i_\nu| + |i_\mu|$ . II. Gilt  $i_{\mu\nu} \supset i_{\mu\nu+1}$  und  $\prod_{\nu=1}^{\infty} i_{\mu\nu} = 0$ , so  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |i_{\mu\nu}| = 0$ . —  $O$  heiße fast offen, wenn es sich als Vereinigungsmenge abzählbar vieler punktfremder  $i_\nu$  darstellen läßt. Es gilt: Läßt sich  $O$  auf zwei Weisen so darstellen:  $O = \sum i_{\mu_r} = \sum i_{\nu_s}$ , so ist  $\sum_{r=1}^{\infty} |i_{\mu_r}| = \sum_{s=1}^{\infty} |i_{\nu_s}|$ . Man nenne diese Zahl das Maß  $|O|$  von  $O$ . Bezeichnet man analog der Lebesgueschen Theorie als äußeres Maß  $\bar{A}$  der Menge  $A \subset J$  die untere Grenze der Maße der  $A$  überdeckenden fast offenen Mengen, als inneres Maß  $\underline{A}$  von  $A$  die Zahl  $|J| - \bar{J} - \bar{A}$  und nennt  $A$  meßbar, wenn  $\underline{A} = \bar{A}$  ist, so gelten alle üblichen Sätze der Maßtheorie; man kommt insbesondere zum Lebesgueschen Maß, wenn man den  $i_\nu$  die gewöhnliche Länge als Maß zuordnet. Es ist klar, daß man durch andere Wahl der  $|i_\nu|$  zu den Lebesgue-Stieltjes-Integralen gelangt. Verf. gibt weiter einen einfachen, die Einteilung in die halboffenen  $i_\nu$  benutzenden Beweis dafür, daß jede vollstetige, additive Mengenfunktion als bestimmtes Integral darstellbar ist, und deutet an, wie sich die Theorie auf mehr Dimensionen übertragen läßt.

H. Busemann (Göttingen).

## Analysis.

**Carrara, N.:** Corollario al teorema della derivazione delle funzioni definite da integrali. — Applicazione ai metodi di misura sperimentali delle grandezze fisiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 439—441 (1932).

**Cotton, Émile:** Sur les intégrales dépendant de paramètres arbitraires. Ann. École norm., III. s. 49, 351—382 (1932).

L'auteur étudie les intégrales de la forme

$$I_1(u, v) = \int_{a(u, v)}^{b(u, v)} f(u, v) dx, \quad I_2(u, v) = \int_{S(u, v)} f(x, y, u, v) dx dy.$$

Il complète, précise et démontre ses résultats précédents [C. R. Acad. Sci., Paris 194, 335—337 (1932); voir Zbl. 3, 300].

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

**Mambriani, Antonio:** Saggio di una nuova trattazione dei numeri e dei polinomi, di Bernoulli e di Euler. Mem. Accad. Ital., Mat. 3, Nr 4, 1—36 (1932).

In this paper the author applies his "algebra of sequences" [Ann. Mat. pura appl., IV. s. 8, 103—139 (1930); IV. s. 9, 25—56 (1931)] to Bernoulli and Euler numbers and to Bernoulli polynomials, obtaining a considerable number of well known results (see this Zbl. 1, 331).

C. R. Adams (Providence).

**Marples, P. M.:** Linear difference equations. An elementary treatment. J. Inst. Actuar. 63, 404—423 (1932).

**Miniatoff, A. K.:** Über die Konstruktion der Interpolationsformeln. Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 1/2, 15—63 u. dtsch. Zusammenfassung 64—65 (1932) [Russisch].

En désignant par  $|a_{\mu\nu}|^{(k)}$  le déterminant d'ordre  $k$  dont les éléments sont  $a_{\mu\nu}$ , par  $\begin{vmatrix} a_{\mu\nu} \\ b_\nu \end{vmatrix}^{(k)}$  celui qu'on en obtient en remplaçant les éléments de la dernière ligne par  $b_\nu$ , on a l'identité

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\left| \begin{matrix} \psi(x_\mu x_\nu) \\ f(x_\nu) \end{matrix} \right|^{(k)}}{\left| \psi(x_\mu x_\nu) \right|^{(k-1)}} \frac{\left| \begin{matrix} \psi(x_\mu x_\nu) \\ \psi(x x_\nu) \end{matrix} \right|^{(k)}}{\left| \psi(x_\mu x_\nu) \right|^{(k)}} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{1}{\left| \psi(x_\mu x_\nu) \right|^{(n)}} \left| \begin{matrix} \psi(x_1 x_1) & \dots & \psi(x_1 x_n) & \psi(x_1 x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi(x_n x_1) & \dots & \psi(x_n x_n) & \psi(x_n x) \\ f(x_1) & \dots & f(x_n) & f(x) \end{matrix} \right|,$$

où  $\psi(\xi\eta)$  est une fonction symétrique de  $x$  et  $y$ , telle que  $|\psi(x_\mu x_\nu)|^{(k)} \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), d'ailleurs arbitraire. Le reste  $R_n(x)$  s'annule dans les cas où:  
1.  $x = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 2. la fonction à interpoler  $f(x)$  est une combinaison linéaire des fonctions  $\psi(x x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Si

$$\psi(\xi\eta) = 1 + \sum_{m=1}^n \frac{(\xi - x_1) \dots (\xi - x_m)(\eta - x_1) \dots (\eta - x_m)}{(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-1})},$$

on retrouve la formule ordinaire de Newton. D'autre part, en posant  $\psi(\xi\eta) = \frac{1}{\xi + \eta}$ , l'auteur établit une nouvelle formule d'interpolation procédant suivant les fonctions rationnelles à zéros  $x_k$  et à pôles  $-x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ); en particulier, il considère le cas des fonctions  $f(x)$  analytiques, en étudiant la question de convergence (le reste étant exprimé par l'intégrale de Cauchy). Pour obtenir la formule de Taylor, il faut faire tendre, dans la formule générale, les  $x_i$  vers  $a$ , en admettant que

$$\psi(\xi\eta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} (\xi - a)^n (\eta - a)^n;$$

de même, si

$$\psi(\xi\eta) = \frac{2}{\frac{\theta(\xi) + (\xi - a)}{\theta(\xi) - (\xi - a)} + \frac{\theta(\eta) + (\eta - a)}{\theta(\eta) - (\eta - a)}},$$

on obtient la série de Lagrange liée à l'équation  $y = a + x\theta(y)$ . *W. Gontcharoff.*

**Gurney, Margaret:** Cesàro summability of double series. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 825–827 (1932).

Une série double  $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_{\mu\nu}$  est dite sommable  $(C; \alpha, \beta)$  si la suite double

$$c_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} \frac{A_{\mu-i}^{\alpha} A_{\nu-j}^{\beta}}{A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta}} a_{ij}, \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots)$$

où

$$A_q^p = \binom{p+q}{p},$$

est convergente. L'auteur donne quelques simples relations entre la sommabilité d'une série double et celle de ses lignes (ou colonnes). *F. Leja (Warszawa).*

**Mazur, S., et W. Orlicz:** Sur les méthodes linéaires de sommation. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 32–34 (1933).

Ankündigung einer Reihe von Sätzen, die sich an die Untersuchungen von S. Mazur [Studia Math. 2, 40–50 (1930)] und S. Banach, Théorie des opérations linéaires, S. 90–95 (Warschau 1932) anschließen. Um die Art dieser Sätze zu kennzeichnen, seien zwei unter ihnen angeführt. „Wenn das Limitierungsverfahren  $A$  permanent ist und das Verfahren  $B$  das Konvergenzfeld von  $A$  enthält, so ist für die Existenz eines Verfahrens  $C$ , dessen Konvergenzfeld mit dem von  $A$  übereinstimmt und das der Bedingung  $C\text{-lim}_s = B\text{-lim}_s$ , genügt, notwendig und hinreichend:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} \neq \sum_{q=1}^{\infty} \lim_{p \rightarrow \infty} b_{pq}.$$

„Wenn es eine divergente Folge  $s_n$  gibt, die durch die Verfahren  $A_1, A_2, \dots$  limitierbar ist, und zwar zum selben Grenzwert:  $A_n\text{-lim}_s = s$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), dann gibt es auch eine nicht-beschränkte Folge  $\sigma_n$ , für die  $A_n\text{-lim}_s = s$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) erfüllt ist.“

*R. Schmidt (Kiel).*

**Winn, C. E.:** Sur la relation entre une suite donnée et une autre suite dérivée avec le même intervalle d'oscillation. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 154–156 (1933).

In einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 4, 346) wurde vom Verf. der folgende Satz bewiesen: Die Zahlen  $a_{n\nu}$  seien für  $n \geq \nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$  gegeben und nichtnegativ, ferner sei  $t_n = \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_{\nu}$  gesetzt; damit für jede Zahlenfolge  $\{s_n\}$  die Beziehungen



$\overline{\lim} t_n = \overline{\lim} s_n$ ,  $\underline{\lim} t_n = \underline{\lim} s_n$  gelten, sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n\nu} = 0$  für jedes  $\nu$ , 2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} = 1$ , 3.  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{n(\nu)\nu} = 1$  für eine Folge  $n(\nu) \geq \nu$  (im Referat l. c. wurde versehentlich die Bedingung 1. weggelassen). Dieser Satz wird nun dahin verallgemeinert, daß die Voraussetzung  $a_{n\nu} \geq 0$  durch die allgemeinere:  $a_{n\nu}$  reell ersetzt werden kann, wenn die Zusatzbedingung

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n |a_{n\nu}| = 1$  hinzugefügt wird. Birnbäum (Lwów).

**Verblunsky, S.: On some classes of Fourier series.** Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 287—327 (1932).

Consider the Fourier series of functions of period  $2\pi$ , belonging respectively to one of the following six classes (1)  $L$ -integrable, (2) bounded, (3)  $R$ -integrable, (4) continuous, (5) of bounded variation, (6) absolutely continuous. It was Fekete [Acta Litt. Sci. Szeged 1, 148—166 (1922—1923); see also the referee's note, Bull. int. Acad. Polon. Sci. 1927, 343—347] who first considered the problem of necessary and sufficient conditions for a sequence  $\{\lambda_n\}$  to transform an arbitrary Fourier series

(\*)  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  of one of the above six classes into a Fourier

series (\*\*)  $\frac{a_0 \lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \lambda_n$  of the same class. In his paper Ver-

blunsky solves completely the more general problem of  $\{\lambda_n\}$  transforming one of the six classes into another (and an analogous problem for conjugate series). It would be difficult to enumerate all the results. As an example we quote the following theorem. A necessary and sufficient condition for an arbitrary series (\*) of class (2) to be transformed in a series (\*\*) of class (5) is that  $\sum \lambda_n \cos nx$  should be the Fourier series of a function „of bounded variation in mean“.

A. Zygmund (Wilno).

**Verblunsky, S.: On the theory of trigonometric series. I.** Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 441—456 (1932).

Let (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$ ,  $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ , be a given trigonometric series, and  $\overline{P}(x) = \lim_{r \rightarrow 1} \overline{P}(r, x)$ ,  $\underline{P}(x) = \lim_{r \rightarrow 1} P(r, x)$ ,  $P(r, x) = \sum A_n r^n$  respectively the upper and lower Poisson sums of (1). It is assumed that the series (2)  $\sum A_n/n^2$  is a Fourier series of a function  $F(x) \subset L$ . Let  $\Delta^2 F(x, h) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$  and  $D^2 F(x)$ ,  $\bar{D}^2 F(x)$ ,  $\underline{D}^2 F(x)$ , respectively, be the generalized second, the upper generalized, and lower generalized second, derivatives of  $F(x)$  defined in the usual manner. The author proves, by a straight forward method, the following results: I. The inequalities

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta^2 F(x, h)/h^2 \geq \pi \lim_{r \rightarrow 1} (1-r) P(r, x), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \Delta^2 F(x, h)/h^2 \leq \pi \lim_{r \rightarrow 1} (1-r) \overline{P}(r, x)$$

hold at each point  $x$  at which (2) is Poisson summable to  $F(x)$ . II. At all such points  $\underline{P}(x)$  and  $\overline{P}(x)$  lie between the upper and lower limits as  $h \rightarrow 0$ , of

$$3/(2h^3) \int_0^h [\Delta^2 F(x, h) - \Delta^2 F(x, u)] \cos u \, du.$$

As simple applications of his method the author derives several interesting results, among those the well known theorems of Fatou (Acta math. 30), Grosz (S.-B. Akad. Wiss. Wien 124), Rajchman and Zygmund (Math. Z. 25). Essentially the same, although slightly more complicated in details, method is applied for a discussion of the cases where the series  $\sum B_n(x)/n^3$ ,  $\sum A_n(x)/n^4$ , rather than (2), are Fourier series, where  $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$ .

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).



● **Wiener, Norbert: The Fourier integral and certain of its applications.** Cambridge: Univ. press 1933. XI, 201 S. geb. 12/6.

Das Buch zerfällt hauptsächlich in drei mehr oder weniger getrennte Teile, versehen mit einer Einleitung, in welcher die Grundelemente der Theorie der Lebesgueschen Integrale wie auch die der orthogonalen Funktionenfolgen mit dem Riesz-Fischerschen Satze dargestellt werden. — Im ersten Teile (Kapitel I) werden die Fourierschen Transformationen behandelt, insbesondere der Plancherelsche Satz, welcher mit Zuhilfenahme der Hermiteschen Polynome und Funktionen bewiesen wird. — Der zweite, hervorragendste Teil (Kapitel II und III) enthält hauptsächlich die vom Verf. in der Arbeit „Tauberian Theorems“ (vgl. dies. Zbl. 4, 59) veröffentlichten Resultate. Er bezieht sich nämlich hauptsächlich auf die Inversionssätze der Limitierungsverfahren

der allgemeinen Form  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) f(t) dt$ ,  $x \rightarrow \infty$  (Taubersche, Landau-Ikehara'sche Sätze), wobei der weitgehende Satz über die Approximation der Funktionen durch Ausdrücke der Form  $\sum_{v=0}^{\infty} A_v K(x-a_v)$  den Schwerpunkt bildet. Anwendungen dieser Umkehrungssätze werden auf zahlentheoretische Fragen (insbesondere der Beweis des Primzahlsatzes durch die Lambertsche Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} A(n) x^n / (1-x^n) = \sum_{m=1}^{\infty} \log m x^m$ ) und quadratische Mittelwerte von Funktionen gemacht. — Der dritte Teil (Kapitel IV), der sich auf das Vorangehende stützt, führt den Begriff des Spektrums einer Funktion wie auch die Grundzüge der fastperiodischen Funktionen aus, womit dem Ganzen mehr Einheit gegeben wird.

Karamata (Beograd).

**Turner, Alice Willard: Note on conjugate Fourier integrals.** Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 26, 123—129 (1932).

Following a suggestion of Titchmarsh [J. London Math. Soc. 4, 204—206 (1929)], the author gives a complete proof of the following theorem [see Fund. Math. 13,

285 (1929)]. If  $|f(x)| \log |f(x)|$  belongs to  $L$  in  $(0, 2\pi)$ , the function  $g(x)$ , conjugate to  $f$ , belongs to  $L$ . Moreover, let  $|f(x)|$ , not necessarily periodic, belong to  $L$  in  $(-\infty, \infty)$ , and let  $g(x)$  be the value of the integral conjugate to the Fourier integral of  $f$ . If  $\int_{-N}^{+N} |f| \log |f| dt = O(1)$  for  $N \rightarrow \infty$ , then  $|g(x)|$  belongs to  $L$  in  $(-\infty, +\infty)$ .

A. Zygmund (Wilno).

**Ostrowski, Alexander: Mathematische Miszellen. XVII. Notiz zu einem Satz von H. Bohr.** Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42, 160—165 (1932).

Der Verf. beweist die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Bohr über Dirichletsche Reihen mit linear unabhängigen Exponenten: Es seien  $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$  eine Dirichletsche Reihe, welche für ein gewisses  $\sigma_0$  gleichmäßig in  $t$  konvergiere und  $\mu$  fest,  $0 < \mu < 1$ . Es seien die Exponenten, die in einem Intervall  $[(1-\mu)n, (1+\mu)n]$  liegen, für jedes  $n$  linear unabhängig. Ist dann  $|f(s)| \leq C$  für  $\Re s \geq \sigma_1$ , so konvergiert  $f(s)$  für jedes  $s$ , dessen Realteil  $> \sigma_1$  ist, absolut. Die wesentlich schwächere Voraussetzung über die Exponenten erlaubt es nicht, wie im Bohrschen Satze, lediglich die Existenz einer Konvergenzhalbene zu postulieren, um bereits auf die Gleichheit der Abszissen absoluter Konvergenz und Beschränktheit schließen zu können.

F. Bohnenblust (Princeton).

### Differentialgleichungen:

**Drach, Jules: Sur l'intégration par quadratures d'une classe d'équations différentielles:  $a^2 y / dx^2 = F(x, y)$ .** C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1337—1342 (1932).

Bestimmung einer Funktion  $F(x, z)$  derart, daß die partielle Differentialgleichung  $\partial f / \partial x + \partial f / \partial y \cdot z' + \partial f / \partial y' \cdot F(x, y) = 0$  ein Integral der Form  $A_0 + \sum m_j \log(y' - \gamma_j)$  besitzt. Dabei sind  $A_0$  und  $\gamma_j(x, y)$  willkürlich wählbar, während die Konstanten  $m_j$  gegeben sind; Unterscheidung zwischen  $\sum m_j = 0$  und  $\sum m_j \neq 0$ . Rellich (Göttingen).



**Sanielevici, S.:** Sur l'intégration des équations différentielles par les fractions continues. Ann. Sci. Univ. Jassy 18, 197—214 (1932).

Die Lösungen gewisser Riccatischer Differentialgleichungen werden durch ein elementares Rekursionsverfahren formal in unendliche Kettenbrüche entwickelt.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

**Tricomi, Francesco:** Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 1—20 (1933).

Es handelt sich um die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + M \frac{dy}{dt} + N \sin y + P = 0,$$

wobei  $M, N, P$  positive Konstanten sind. Man fragt nach einer Lösung  $y(t)$ , mit der Bedingung, daß die Ableitung  $y'(t)$  eine periodische Funktion sein soll. Nach des Verf. Diskussion ist die Frage zu bejahen. Der Beweis dafür scheint aber dem Ref. nicht zuverlässig.

G. Cimmino (Napoli).

**Fite, W. B.:** Periodic solutions of linear differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 865—871 (1932).

**Krawtchouk, M.:** Sur l'évolution en séries des solutions des équations différentielles linéaires. J. Cycle math. 2, 7—30 u. franz. Zusammenfassung 30—31 (1932) [Ukrainisch].

Die Entwicklung im Intervalle  $(a, b)$  der Lösung des unhomogenen Systems  $L[y] \equiv y^{(k)} + A_1 y^{(k-1)} + \dots + A_k y = f(x)$ ,

$$U_i[y] \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^{(i)} y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(i)} y^{(j)}(b) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$$

(vorausgesetzt, daß diese Lösung eindeutig bestimmt ist), stützt sich auf folgende selbstverständliche Tatsache: Ist  $\{\Psi_n\}$  irgendein vollständiges orthogonales System stetiger Funktionen und  $f \sim \sum f_n \Psi_n(x)$ , so ist  $y = \sum f_n \psi_n(x)$ , wobei  $\psi_n$  die Lösungen der Systeme  $L[\psi_n] = \Psi_n$ ,  $U_i[\psi_n] = 0$  sind. Anstatt die letzten Gleichungen zu lösen, empfiehlt der Verf., von einem gegebenen vollständigen System  $\{\Phi_n\}$  ausgehend und  $L$  als Summe zweier Operatoren darstellend,  $L \equiv M + N$ , wobei  $M$  von  $k$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten,  $N$  von der Ordnung  $\leq k-1$  ist, die Systeme  $M[\varphi_n] = \Phi_n$ ,  $U_i[\varphi_n] = 0$  zu lösen, dann  $\{L[\varphi_n]\}$  zu konstruieren und es zu orthogonalisieren (auch im verallgemeinerten Sinne). Für den Beweis der Vollständigkeit des letzten Systems weist der Verf. auf seine früheren Arbeiten (die Daten fehlen). Die angegebenen Beispiele werden nicht genau nach diesem Schema gelöst. Stepanoff.

**Bruwier, L.:** Sur une classe d'équations récurro-différentielles. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 4, 1—48 (1932).

The sequence of differential equations  $y'_n = a y_{n+1} + F_n(x)$  has as solution

$$y_n = D^n y_1 / a^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} D^{k-1} F_{n-k} / a^k,$$

as well as

$$y_n = D^n \varphi / a^{n-1} + \int_a^x \sum_{k=0}^{\infty} a^k (x-z)^k F_{n+k}(z) dz / k!,$$

the latter valid if the  $F_n(x)$  are uniformly bounded and continuous. This suggests the utilization of the symbolic method of solution. Assuming  $V y_n = y_{n+1}$  and

$I^k F = (I)^k F = \int_a^x (x-z)^{k-1} F(z) dz / (k-1)!$ , the symbolic equivalent of the given

system is  $(1 - aIV) y_n = IF_n$ , the particular solution being  $y_n = (1 - aIV)^{-1} IF_n$

$= I \sum_0^{\infty} a^k (IV)^k F_n$ . Extension of the operator process, shows that a particular so-

lution of the sequence of differential equations

$$y_n^{(p)} + A_1 y_n^{(p-1)} + \dots + A_p y_n = B_1 y_{n+1} + \dots + B_q y_{n+q} + F_n(x)$$



may be obtained. — The extension to the case where the  $A_i$  and  $B_i$  are functions of  $x$  is handled by noting that a particular solution of

$$y^{(p)}(x) + A_1(x) y^{(p-1)}(x) + \cdots + A_p(x) y(x) = F(x)$$

can be written in the form  $y(x) = \int_{x_0}^x N(x, s) F(s) ds$ , and that the operator

$$\mathfrak{L} F = \int_{x_0}^x N(x, s) F(s) ds$$

can be treated and combined with  $V$  in the same manner as the operator  $I$ . The paper closes with an existence theorem for sequences in the form  $y'_n = F_n(y_n, y_{n+1}, x)$ ,  $F_n$  satisfying a suitable Lipschitz condition, which can obviously be regarded as an existence theorem for an infinite system of differential equations in the infinite set of functions  $y_n(x)$  and as such is a special case of such theorems in general vector spaces [see, for instance, Graves, Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 546 ff. (1927)].

T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

**Yosida, Kôsaku:** On the distribution of  $\alpha$ -points of solutions for linear differential equation of the second order. Proc. Imp. Acad. Jap. **8**, 335—336 (1932).

Es sei  $w(z)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $w'' + A(z)w = 0$ , die der Bedingung  $|w(z_0)| = \alpha$  genügt. Wie weit darf man in der Richtung  $\arg(z - z_0) = \varphi$  von  $z_0$  fortgehen, ehe wieder  $|w(z)| = \alpha$  wird? Verf. nimmt  $z_0 = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $A(x) = -F(x) - iG(x)$ , und vergleicht  $w(x)$  mit derjenigen Lösung  $W(x)$  von  $W'' - H(x)W = 0$ , die durch  $W(0) = \alpha$ ,  $W'(0) = [D_+ | w(x) ]_{x=0} = \beta$  festgelegt ist. Dabei soll  $H(x)$  in geeigneter Weise so gewählt werden, daß  $F(x) \geq H(x)$ . Wenn  $\beta > 0$  und  $W(x) \neq \alpha$  für  $0 < x < x_0$ , so ist auch  $|w(x)| \neq \alpha$  für  $0 < x < x_0$ . Verf. wählt speziell nach Sturmschen Muster  $H(x) = -\max_{0 \leq x \leq x_0} |F(x)|$ , wodurch er eine Un-

gleichung für  $x_0$  bekommt. Günstiger würde wohl  $H(x) = -\min_{0 \leq x \leq x_0} F(x)$  sein, was auch eine Fallunterscheidung ermöglichen würde. (Vgl. nachfolg. Referat.) Hille.

**Nakano, Hidegorô:** Über die Verteilung der Nullstellen von den Lösungen der Differentialgleichung  $\frac{d^2 w}{dz^2} + G(z)w = 0$  einer komplexen Veränderlichen. Proc. Imp. Acad. Jap. **8**, 337—339 (1932).

Verf. behandelt dieselbe Fragestellung wie K. Yosida (siehe vorhergehendes Referat) mit etwas verschiedenen Methoden. Die Abschätzungen sind teilweise spezieller aber günstiger als diejenigen von Yosida. Hille (Princeton, N. J.).

● **Kryloff, N.:** „Angenäherte und symbolische Lösung der Differentialgleichungen der mathematischen Physik.“ (Heaviside-Methoden und Anwendungen.) Charkow u. Kiev: Techn. Staatsverl. 1931. 162 S. [Ukrainisch].

**Costa, A. Almeida:** Über das Jacobische Integral einer Gleichung erster Ordnung. An. Fac. Ci. Porto **17**, 240—242 (1932) [Portugiesisch].

**Rosenblatt, A.:** Sopra la questione della unicità per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **16**, 429—433 (1932).

**Thomas, Tracy Yerkas, and Edwin Warren Titt:** Systems of partial differential equations and their characteristic surfaces. Ann. of Math., II. s. **34**, 1—80 (1933).

Part I of this paper contains a very general and systematic treatment of the existence theorems for systems of partial differential equations of the first order, Part II being devoted to a study of their characteristic surfaces. Detailed attention is given to systems of invariantive (tensor) type, the work being illustrated by applications to the partial differential equations of relativity. The theory is developed with reference to a series of papers by T. Y. Thomas in Math. Ann. **101**, 713 (1929); Amer. J. Math. **52**, 225 (1930); Ann. of Math. II, **31**, 687 and 714 (1930), and by E. Cartan, this Zbl. **2**, 264 (1931). — The paper is at once too long, too general and too detailed



for an adequate abstract to be given in a few words, but its scope may be gathered from the following excerpts from the sectional headings: — Regular systems of differential equations; invariantive systems (affine, metric and vector cases); general existence theorems; functional systems; conditions for complete integrability; existence theorems in normal coordinates; differential equations of characteristic surfaces; sets of monomials; general existence theorem and applications; geometrical interpretation; convergence proofs.

*H. S. Ruse* (Edinburgh).

**Fouarge, L.:** Sur un système de Koenig, d'équations aux dérivées partielles du premier ordre associées à certains ensembles continus, finis de transformations. *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, III. s. 17, H. 1, 1–27 (1932).

Es werden zwei kontinuierliche wesentlich  $r$ - und  $t$ -gliedrige Transformationsscharen  $z'_\nu = f_\nu(z_1, \dots, z_n; a_1, \dots, a_r)$ ;  $y'_\nu = F_\nu(y_1, \dots, y_n; b_1, \dots, b_t)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) betrachtet. Ist die Produkttransformationsschar

$$z''_\nu = F_\nu[f_1(z, a), \dots, f_n(z, a); b_1, \dots, b_t] \equiv \Phi_\nu(z_1, \dots, z_n; a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_t)$$

wesentlich  $s = r + t - \sigma$ -gliedrig ( $\sigma > 0$ ), so genügen die  $\Phi_\nu$  einem vollständigen Systeme von der Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} + \sum_{\tau=1}^{r-\sigma} \lambda_{\tau k}(a, b) \frac{\partial \Phi}{\partial a_{\sigma+\tau}} + \sum_{j=1}^t \lambda_{r+j-\sigma, k}(a, b) \frac{\partial \Phi}{\partial b_j} = 0; \quad (k = 1, \dots, \sigma). \quad (1)$$

Daraus leitet der Verf. ab, daß im besonderen die  $z'_\nu = f_\nu(z, a)$  ein System von der Form

$$\frac{\partial z'_\nu}{\partial a_k} + \sum_{\tau=1}^{r-\sigma} \lambda_{\tau k}^0(a_1, \dots, a_r) \frac{\partial z'_\nu}{\partial a_{\sigma+\tau}} = \sum_{j=1}^t \psi_{jk}(a_1, \dots, a_r) \xi_{j\nu}(z'_1, \dots, z'_n) \quad (2)$$

befriedigen. Dieses System hängt im allgemeinen von der Wahl eines  $(b_1, \dots, b_t)$ -Punktes ab und ist davon unabhängig, wenn die in den Gleichungen (1) vorkommenden Funktionen  $\lambda_{\tau k}(a, b)$  von den Veränderlichen  $b_1, \dots, b_t$  nicht abhängen. Umgekehrt gilt in diesem ausgezeichneten Falle: Die aus jeder wesentlich  $r$ -gliedrigen den Gleichungen (2) genügenden Integraltransformationsschar  $z'_\nu = I_\nu(z_1, \dots, z_n; a_1, \dots, a_r)$  und jeder wesentlich  $t$ -gliedrigen den (mittels der in (1) und (2) vorkommenden Funktionen gebildeten) Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^n \left\{ \sum_{h=1}^t \psi_{h\nu} \xi_{h\nu} \right\} \frac{\partial \Xi}{\partial z'_\nu} + \sum_{j=1}^t \lambda_{r+j-\sigma} \frac{\partial \Xi}{\partial b_j} = 0$$

genügenden Integraltransformationsschar  $z''_\nu = K_\nu(z'_1, \dots, z'_n; b_1, \dots, b_t)$  entstandene Produkttransformationsschar  $z''_\nu = K_\nu[I_1(z, a), \dots, I_n(z, a); b_1, \dots, b_t]$  ist wesentlich höchstens  $r + t - \sigma$ -gliedrig. — Den Untersuchungen liegen natürlich gewisse, die Holomorphie der in Betracht kommenden Funktionen betreffende Voraussetzungen zugrunde.

*Borůvka* (Brno).

**Schauder, Juliusz:** Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique. *C. R. Acad. Sci., Paris* 195, 1365–1367 (1932).

L'aut. considère une équation du type elliptique à  $n$  variables

$$\sum_{i,k} a_{i,k} \partial^2 u / \partial x_i \partial x_k = f,$$

où les  $a_{i,k}$  sont des fonctions données, continues au sens de Hölder avec l'exposant  $\alpha < 1$ , et il indique certaines inégalités concernant les coefficients des conditions de Hölder d'exposant  $\alpha$  auxquelles satisfont les dérivées secondes de  $u$ , en regardant comme connues les valeurs-frontière. L'aut. indique aussi une inégalité relative au cas où les  $a_{i,k}$  remplissent une condition de Lipschitz ( $\alpha = 1$ ). L'aut. annonce que sa démonstration, qui n'est pas exposée, permet d'établir que le problème de Dirichlet relatif à l'équation donnée a toujours une solution dans ce cas, et permet aussi de résoudre le même problème pour l'équation générale du type elliptique. Ce résultat est appliqué aux équations non linéaires où les dérivées secondes figurent linéairement.

*Georges Giraud* (Clermont-Ferrand).



**Hornich, Hans:** Die allgemeine vermischte Randwertaufgabe der ebenen Potentialtheorie. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 1, 11—13 (1933).

**Maria, A. J.:** Examples of harmonic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 839—843 (1932).

**Brillouin, Mareel:** Domaines plans à connexion multiple. Choix de coordonnées de référence. Coordonnées électrostatiques. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 145—148 (1933).

In einem mehrfach zusammenhängenden Bereiche sei eine Potentialfunktion definiert, die auf einigen geschlossenen Kurven der Umrandung verschwindet, auf den anderen einen konstanten positiven Wert besitzt. In ganz elementarer Weise wird der Verlauf der Äquipotential- und der Kraftlinien geschildert; nimmt man diese Kurven als Parameterkurven eines Koordinatensystems, so entspricht dieses in mancher Hinsicht den Polarkoordinaten im Kreisring. Diese Betrachtung wird noch etwas verallgemeinert: das Potential braucht nicht auf den Kurven der Umrandung konstant zu sein, sondern kann von Ladungen herrühren, die in Punkten im Inneren der Randkurven (also außerhalb des Bereiches) konzentriert sind. Anwendungen sollen noch publiziert werden.

Willy Feller (Kiel).

**Wavre, Rolin:** Sur les polydromies des potentiels newtoniens d'une famille de corps homogènes. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1238—1240 (1932).

Das Newtonsche Innenpotential eines homogenen, durch ebene oder sphärische Flächenstücke begrenzten Körpers ist ein Zweig einer unendlich vieldeutigen harmonischen Funktion, deren Zweige beim Umlaufen um die Kanten des Körpers sich vertauschen. Alle von diesen Verzweigungslinien verschiedenen reellen Singularitäten sind Pole. Entsprechendes gilt für das Außenpotential. Der Beweis wird beidemale nur skizziert.

Wintner (Baltimore).

**Wavre, R.:** Sur le prolongement analytique des potentiels de surface. C. R. Soc. Physique Genève 49, 178—179 (1932).

**Wavre, R.:** Sur les polydromies des potentiels. C. R. Soc. Physique Genève 49, 205—206 (1932).

**Wavre, R.:** Nouveaux exemples de polydromies de potentiels newtoniens prolongés. C. R. Soc. Physique Genève 49, 212—214 (1932).

**Wavre, R.:** Les polydromies des potentiels newtoniens et la topologie. C. R. Soc. Physique Genève 49, 231—234 (1932).

### Integralgleichungen und Verwandtes:

**Fréchet, Maurice:** On the behavior of the  $n$ th iterate of a Fredholm kernel as  $n$  becomes infinite. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 18, 671—673 (1932).

Several results are stated (the proof being referred to a later publication) concerning the behavior, for large  $n$ , of the iterated kernel  $K^n(M, P)$  of a given kernel  $K(M, P)$ , assuming that these iterated kernels are continuous for sufficiently large  $n$ , say  $n > n_0$ . Let  $L_n = \max K^n(M, P)$ , and let  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  be the characteristic values of the kernel  $K$ . Then  $L_n$  is not bounded if at least one of the  $\lambda_i$  is less than 1 in absolute value, or if, all  $|\lambda_i|$  being  $\geq 1$ , there exists at least one  $|\lambda_n| = 1$ , which is a multiple pole of the resolvent of  $K(M, P)$ . In all other cases  $L_n$  is bounded, while, in the case where all  $|\lambda_i| > 1$ ,  $L_n \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ . In the case where  $L_n$  is bounded it is stated that there exists a continuous function  $\Pi(M, P)$ , independent of  $\nu$ , such that  $1/n[K^{\nu+1} + K^{\nu+2} + \dots + K^{\nu+n}] - \Pi = O(1/n)$  as  $n \rightarrow \infty$ , for any fixed  $\nu > n_0$ . Furthermore,  $\Pi(M, P) = \sum_{i=1}^r \Phi_i(M) \Psi_i(P)$  where  $\{\Phi_i, \Psi_i\}$  is any biorthonormal set of  $K(M, P)$  relative to the characteristic value  $\lambda = 1$ , while  $\Pi \equiv 0$ , if all  $\lambda \neq 1$ . A necessary and sufficient condition that  $K^n$  should itself converge uniformly (other conditions for the boundedness of  $L_n$  being satisfied) is that  $K$  should have no characteristic values  $|\lambda| = 1$ , except for  $\lambda = 1$ . Some special cases are discussed. J. D. Tamarkin.



**Trjitzinsky, W. J.:** The general case of integro- $q$ -difference equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **18**, 713–719 (1932).

Betrachtet wird eine Integro- $q$ -Differenzengleichung der Form

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) y(q^{n-i}x) = b(x) + \int_0^x K(x, \zeta) y(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

mit analytischen Koeffizienten und  $b(x)$ ,  $a_0(x)$ ,  $a_n(x) \neq 0$ ,  $|q| > 1$ . Durch die Transformation  $x = e^{t \log q}$  geht (1) über in die Form

$$M_n(t; z(t)) \equiv \sum \alpha_i(t) z(t + n - i) = \beta(t) + \int_t^\infty W(t, z) z(r) d(e^{r \log q}). \quad (2)$$

Unter Benutzung von Resultaten einer noch nicht veröffentlichten Arbeit, die in den Acta math. erscheinen soll, wird ein Satz etwa folgender Art aufgestellt: In einem Gebiet der  $t$ -Ebene, das links von einer Geraden mit der Neigung  $\log |q| \cdot \arg q$  liegt und sich nur in den beiden durch diese Gerade bestimmten Richtungen ins Unendliche erstreckt, gibt es eine analytische Lösung von (2), falls die Koeffizienten  $\alpha_i(t)$  und  $\beta(t)$  in diesem Gebiet ein gewisses asymptotisches Verhalten zeigen und die charakteristische Gleichung  $\sum a_i(0) \zeta^{n-i} = 0$  keine Wurzel der Form  $q^p$  mit positivem ganzen  $p$  besitzt.

*R. Iglisch (Aachen).*

**Conte, Luigi:** Sopra una classe d'equazioni integrali. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 283 bis 286 (1932).

It is shown that an integral equation of the form  $f(x) = \varphi(x) - \int_0^x e^{mf_1(x) + nf_2(y)} \varphi(y) dy$

can be reduced to a first order linear differential equation in  $z = \varphi(x) - f(x)$  with the condition  $z(0) = 0$ . Three conditions are given which insure that the differential equation  $a'z'' - a''z' - a'^2z = 0$  can be solved in finite form. *Dresden (Swarthmore).*

**Hopf, E.:** On certain integral equations. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 269–272 (1932).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (N. Wiener und E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, vgl. dies. Zbl. **3**, 307) wird das folgende Theorem bewiesen: Es sei  $K(t) \neq 0$  ( $0 < t < \infty$ ) eine reelle, stückweise stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$\int_0^\infty \{K(t) e^{-\theta t}\}^2 dt < \infty \quad (\theta < 1), \quad K(t) \geq 0.$$

Ferner sei  $K_{n+1}(t) = \int_t^\infty K_n dt$ ,  $K_1 = K$  und  $K_2(0) = 1/2$ . Dann besitzt die Integralgleichung  $f(\tau) = \int_0^\infty K(|\tau - t|) f(t) dt$  eine einzige Lösung, für die  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau)/\tau = 1$  und

$$f(0) = \sqrt{\{2K_4(0)\}} \text{ gilt.}$$

*Wegner (Darmstadt).*

**Dienes, P.:** Notes on linear equations in infinite matrices. Quart. J. Math., Oxford Ser. **3**, 253–268 (1932).

Das Rechnen mit den unendlichen Matrizen wird eingeführt und an Beispielen erläutert, formale Sätze über die einseitigen Reziproken von  $A$ ,  $AB$  und  $A+B$  werden abgeleitet, ferner: In einem Matrizenring ist ein „regulärer Betrag“  $|A|$  erklärt, wenn  $|A| \geq 0$ ,  $|cA| = |c| |A|$  für komplexes  $c$ ,  $|E| = 1$  für die Einheitsmatrix,

$$|A+B| \leq |A| + |B|, \quad |AB| \leq |A| |B|, \quad |a_{nk}| \leq |A|$$

und  $|D| = \bar{d}$  ist, wobei  $D$  Diagonalmatrix mit den Elementen  $d_{nn}$  und  $\bar{d} = \sup |d_{nn}| < \infty$

ist. In einem solchen Ring ist für  $|A| < 1$  die Reihe  $1 + \sum (-1)^p A^p$  absolut konvergent und die beiderseitige Reziproke von  $1 + A$ , für  $|A| < \frac{1}{2}$  ist

$$\frac{1}{1+|A|} < |1 + \sum (-1)^p A^p| \leq \frac{1}{1-|A|}.$$

Die Gleichung  $AX - XB = C$  besitzt eine in Form einer absolut konvergenten unendlichen Reihe von Matrizen darstellbare Lösung, wenn  $A = D_1 + A'$ ,  $B = D_2 + B'$ ,



$C = D_3 + C'$  ist,  $D_i$  Diagonalmatrizen mit den Diagonalelementen  $d_n^{(i)}$ ,  $A', B', C'$  rechte Nullteiler von  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$ , wenn ferner  $|d_n^{(1)} - d_k^{(2)}| \geq d > 0$ , wenn  $|C|$  existiert und  $|A'| + |B'| = e < d$  ist. Die Gleichung  $AX - XA = E$  hat keine Lösung  $B$ , die einer Gleichung  $\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{\nu} B^{\nu} = 0$  genügt, wobei die Summe absolut konvergiert und die  $A_{\nu}$  mit  $A$  vertauschbar sind.

Köthe (Münster).

**Cohen, Leon W.:** On the minors of absolutely convergent determinants. Ann. of Math., II. s. 34, 125–129 (1933).

Es sei  $A = |\delta_{ik} + a_{ik}|$  eine unendliche Determinante, die den Bedingungen  $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} < \infty$ ,  $\left( \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p} = \sigma < \infty$  ( $i \neq k$ ),  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 < p \leq 2$

genügt. Mit  $A_{r_1 \dots r_s; c_1 \dots c_s}$  bezeichnen wir die Unterdeterminante von  $A$ , die durch Streichen der Zeilen  $r_i$  und Spalten  $c_j$  entsteht. Dann konvergieren die Reihen

$\sum_{c_1 \dots c_s=1}^{\infty} \left( \sum_{r_1 \dots r_s=1}^{\infty} |A_{r_1 \dots r_s; c_1 \dots c_s}|^q \right)^{p/q}$  und  $\sum_{r_1 \dots r_s=1}^{\infty} \left( \sum_{c_1 \dots c_s=1}^{\infty} |A_{r_1 \dots r_s; c_1 \dots c_s}|^p \right)^{q/p}$  ( $r_i \neq c_j$ ;  $i, j = 1, \dots, s$ ). Für  $\sigma < 1$  wird noch eine Abschätzung dieser Summen gegeben.

Köthe (Münster).

### Variationsrechnung:

● **Volterra, Vito:** Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la physique mathématique. (Conf. faites en 1931 à la fac. d. sci. univ. Charles, Praha et à la fac. d. sci. univ. Masaryk, Brno.) Praha et Brno: Fac. d. sci. univ. Charles et univ. Masaryk 1932. 54 S.

The first of these lectures opens with a rapid survey of the development of the calculus of variations. The connection between problems of ordinary maxima and minima on the one hand and those of the calculus of variations on the other, is made on historical basis by means of the passage from an index  $i$  which runs over a discrete finite range to a continuous variable  $x$ ; this is a fundamental point of view of E. H. Moore's General Analysis. After brief mention of the relation between calculus of variations problems and integral and integro-differential equations, the author gives the essential elements of his theory of functionals, and of its application to the solution of various types of functional equations. — The second lecture begins with a discussion of the application of the functional calculus to the calculus of variations and of the direct methods of Tonelli, which treat the latter domain as part of the former. The various principles and methods which have been used to reduce problems of mathematical physics to minimum problems are then extended to general problems of the calculus of variations; the important role played by the functional calculus is emphasized. The last part of this lecture is devoted to a derivation of the field equations of electrodynamics from a calculus of variations problem and to Levi-Civita's method of arriving at relativistic mechanics by means of Hamilton's principle. The author calls attention to an important remark of Hostinsky on the significance of the treatment of problems of mathematical physics by means of the calculus of variations.

Arnold Dresden (Swarthmore, Pa.).

● **Bogoliouboff, N.:** Les méthodes directes dans le calcul des variations. Charkow u. Kiev: Techn. Staatsverl. 1932. 111 S. [Ukrainisch].

**Carathéodory, C.:** Über die Einteilung der Variationsprobleme von Lagrange nach Klassen. Comment. math. helv. 5, 1–19 (1933).

In der vorliegenden wichtigen Arbeit wird eine neue Einteilung der Variationsprobleme von Lagrange in Klassen angegeben, wobei die Schwierigkeiten, auf welche v. Escherich hingewiesen hatte [Die zweite Variation der einfachen Integrale. S.-B. Akad. Wiss. Wien 107 (1898); 108 (1899); 110 (1901)] beseitigt werden.

L. Schnirelmann (Moskau).

**Carathéodory, C.:** Die Theorie der zweiten Variation beim Problem von Lagrange. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 2, 99—114 (1932).

Auf Grund der in der vorsteh. Arbeit des Verf. angegebenen Einteilung der Extremalen in Klassen wird die Theorie der konjugierten Punkte sowie die Verallgemeinerung der Sturmischen Oszillationssätze ganz allgemein für Lagrangesche Variationsprobleme entwickelt. Dabei sind die v. Escherichschen Ausnahmefälle nicht ausgeschlossen.

*L. Schnirelmann* (Moskau).

**Currier, A. E.:** The variable end point problem of the calculus of variations including a generalization of the classical Jacobi conditions. Trans. Amer. Math. Soc. 34, 689 bis 704 (1932).

In der vorliegenden Arbeit wird eine Verallgemeinerung der Jakobischen Bedingung auf den Fall der variablen Endpunkte gegeben. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für das Auftreten eines Minimums aufgestellt. *L. Schnirelmann*.

**La Paz, Lincoln:** Characteristic properties of the Euclidean length integral. Amer. Math. Monthly 39, 524—527 (1932).

Using the results of D. R. Davis [Trans. Amer. Math. Soc. 30, 724 (1928)] the author gives a proof of the fact, established in a previous paper [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 461 (1931)], that the Euclidean length integral is the only integral of the form  $\int f(x, y, z, y', z') dx$  whose extremals are straight lines and for which transversality reduces to orthogonality (see this Zbl. 2, 268). *Arnold Dresden* (Swarthmore).

**Gillespie, R. P.:** On double integrals in the calculus of variations. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 442—454 (1932).

In this paper the author discusses the problem of minimizing the double integral  $\iint F(x, y, z, A, B, C) du dv$ , where  $A, B, C$  are the Jacobians of  $x, y$ , and  $z$  with respect to  $u$  and  $v$ , and  $F = \varphi \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} + fA + gB + hC$ ,  $\varphi, f, g$ , and  $h$  being functions of  $x, y$ , and  $z$ . It is shown that a single function exists in this case analogous to the function  $F_1$  of the simple problem. In terms of it the Euler equations and the analogue of the Legendre condition are developed. The  $E$ -function, introduced by Radon, and its relation to  $F_1$  are studied for this special problem. Finally the author obtains a sufficient condition for the lower semi-continuity of the integral. This result is contained as a special case in the general theorem proved by McShane in the Ann. of Math. 33, 477 (1932) (see this Zbl. 4, 354). The Euler equations follow from a more general result stated by Radon. *Arnold Dresden* (Swarthmore).

**Herrmann, Horst:** Beiträge zur Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen. Göttingen: Diss. 1932. 35 S.

Bei Eigenwertproblemen (diskretes Spektrum) hängen bekanntlich die Eigenwerte stetig von allen Daten (Gebiet, Integrand, Randwert) ab. In dieser Arbeit wird dasselbe für die Eigenfunktionen bzw. ihre Ableitungen nach den unabhängigen Veränderlichen bis zu beliebig hoher Ordnung nachgewiesen. Die Sätze gelten in dem vollen Umfang, den man erwarten darf. Bei mehrfachen Eigenwerten ist die ganze zu diesem Eigenwert gehörige Schar von Eigenfunktionen stetig von den Daten des Problems abhängig. Die behandelten Probleme haben die Form  $J(\varphi) = \text{Min}$ ,  $H(\varphi) = 1$  mit

$$J(\varphi) = \iint p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy + \iint q\varphi^2 dx dy + \int p\sigma\varphi^2 ds \\ + \iiint K(x, y; \xi, \eta) \varphi(x, y) \varphi(\xi, \eta) \cdot dx dy d\xi d\eta,$$

$$H(\varphi) = \iint r\varphi^2 dx dy + \iiint \bar{K}(x, y; \xi, \eta) \varphi(x, y) \varphi(\xi, \eta) dx dy d\xi d\eta.$$

*Rellich* (Göttingen).

**Braun, Gerhard:** Die ebene kompressible Potentialströmung als Variations- und Eigenwertproblem. Ann. Physik, V. F. 15, 645—676 (1932).

The variation problem  $\delta \iint \left[ c^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} w^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} dx dy = 0$  in which  $w$  is the velocity of flow and  $c$  the critical velocity of sound is first linearised by replacing the



exact potential  $\Phi(x, y)$  by  $\Phi_1 + \Phi_2$ , where  $\Phi_1$  satisfies the boundary conditions and is a first approximation to  $\Phi$ . Terms up to the second order in  $\Phi_2$  are retained and the simplified problem is treated by Ritz's method. — The linearised problem is shown to have an Eigenwert in physically important cases and a sudden rise in the curve of resistance as a function of velocity is attributed to a sudden entrance of the solution appropriate to this Eigenwert. Calculations are made for flow round a circular cylinder and for the parallel flow with waves in a straight canal. The results agree well with those obtained by other methods. *H. Bateman* (Pasadena).

**Hardy, G. H., and J. E. Littlewood:** Some integral inequalities connected with the calculus of variations. *Quart. J. Math., Oxford Ser. 3*, 241–252 (1932).

Jede gelöste Aufgabe der Variationsrechnung kann man in der Form einer Integralungleichung aussprechen. Im Anschluß an frühere Untersuchungen der Verff. und Bliss [*J. London Math. Soc.* **5**, 34–39, 40–46 (1930)] werden hier eine Reihe bemerkenswerter Integralungleichungen aufgestellt, welche aus folgenden Gründen über den Rahmen der klassischen Theorien der Variationsrechnung hinausragen: Erstens sind die Vergleichsfunktionen allgemeinerer Art als üblich (die höchsten vorkommenden Ableitungen gehören gewissen Lebesgueklassen  $L^k$  an). Zweitens, und das ist das wesentlich erschwerende Moment, ist entweder das Integrationsintervall unendlich, oder die Endpunkte desselben sind singuläre Punkte der Eulerschen Differentialgleichung. Typisch sind die folgenden zwei Sätze: 1. Falls  $y(0) = y(1) = 0$  und  $y'(x)$  zu  $L^2$  gehört, so ist  $\int_0^1 x^{-1}(1-x)^{-1} y^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 y'^2 dx$ , mit Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn  $y = Cx(1-x)$ . 2. Falls  $y(x)$  und  $y''(x)$  in  $(0, +\infty)$  zu  $L^2$  gehören, so ist  $\left( \int_0^\infty y'^2 dx \right)^2 \leq 4 \int_0^\infty y^2 dx \int_0^\infty y''^2 dx$ , mit Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn  $y = Ce^{-x \cos \gamma} \sin(x \sin \gamma - \gamma)$ , ( $\gamma = \frac{1}{2}\pi$ ). *I. J. Schoenberg* (Cambridge).

### **Funktionentheorie:**

**Denjoy, Arnaud:** Sur les polygones d'approximation d'une courbe rectifiable. *C. R. Acad. Sci., Paris* **196**, 29–32 (1933).

L'auteur donne une démonstration du théorème de Goursat sur l'intégrale de Cauchy dans le cas où la fonction est supposée régulière à l'intérieur du contour  $C$  et continue sur ce contour, le contour n'ayant pas forcément une tangente qui varie continûment mais étant rectifiable [voir Kamke, *Math. Z.* **35**, 539 (1932); ce Zbl. **4**, 247]. La démonstration de M. Denjoy valable seulement lorsque le contour se compose d'un nombre fini de contours simples de Jordan est basée sur le lemme suivant: Si  $G$  est une courbe simple de Jordan rectifiable de longueur  $L$ , tout polygone d'approximation  $P$  de  $G$  possédant plus de huit cotés a un périmètre inférieur à  $16L$ . *E. Blanc* (Poitiers).

**Montel, Paul:** Sur un théorème de Rouché. *C. R. Acad. Sci., Paris* **195**, 1214–1216 (1932).

Verf. bemerkt zu einer Note von Pompeiu (vgl. dies. Zbl. **5**, 365), daß bekannte Beweise des Rouchéschen Satzes ohne weiteres ein viel schärferes Resultat als das von Pompeiu angegebene liefern. (Darauf ist schon im genannten Ref. hingewiesen worden.) Zwei Funktionen  $f(z)$  und  $f(z) + g(z)$  haben dann im Innern einer Jordankurve  $C$  die gleiche Anzahl Nullstellen, wenn die durch  $g(\zeta)/f(\zeta)$  entworfene Bildkurve von  $C$  den Punkt  $-1$  nicht umschließt. Dies ist z. B. der Fall, wenn für jeden Punkt  $\zeta$  von  $C$  entweder  $|f(\zeta)| > |g(\zeta)|$  oder  $\arg f(\zeta) - \arg g(\zeta) \equiv \pi \pmod{2\pi}$  ist. Es werden noch einige weitere hinreichende Bedingungen dieser Art angegeben. *W. Fenchel*.

**MacColl, L. A.:** On the distributions of the zeros of certain analytic functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **18**, 669–671 (1932).

The transcendental equation  $\sum_{i=1}^m A_i e^{\lambda_i z} = 0$  has been considered by Wilder, Tamarkin, Pólya, and others, a detailed information concerning the asymptotic

distribution of its roots having been found. The present note states results of a natural generalization of these investigations, for the equation of the type

$$\sum_{i=1}^m \exp(\lambda_{in} z^n + \lambda_{i,n-1} z^{n-1} + \dots + \lambda_{i0}) = 0.$$

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Itihara, Tetuzi:** Über die Potenzreihe mit beschränktem Mittelwerte. II. Jap. J. Math. **9**, 47—54 (1932).

Die Potenzreihe  $f(x) = \sum a_n x^n$  erfülle im Einheitskreise  $|x| = r < 1$  für ein  $\lambda > 0$  die Mittelwertsbedingung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\lambda d\varphi \leq 1.$$

Frühere Ergebnisse (dies. Zbl. **3**, 109) werden z. T. etwas verschärft: so gilt schon

$|f(re^{i\varphi})| \leq \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ . Ferner werden Abschätzungen für die Teilsummen der Koeffizienten  $\sigma_n^{(h)} = \sum_0^n a_\nu$  und ihre „Iterierten“  $\sigma_n^{(k+1)} = \sum_0^n \sigma_\nu^{(k)}$  angegeben (vgl. dies. Zbl. **3**, 110).

*Ulrich* (Marburg, Lahn).

**Bourion, Georges:** L'ultraconvergence dans certaines séries de fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1216—1218 (1932).

The author extends his investigations on overconvergence (this. Zbl. **5**, 394) to series of the form  $\sum a_\nu u_\nu(x)$  where the functions  $u_\nu(x)$  are single-valued and regular in a domain  $D$  which may be located on a Riemann surface. Further,

$$(1/n) \log |u_n(x)| \rightarrow u(x),$$

uniformly in any region in  $D$  where the harmonic function  $u(x)$  is regular. The region of convergence of the series which may have infinitely many components, is determined by  $u(x) + \log \alpha < 0$ ,  $\alpha = \overline{\lim} |a_n|^{1/n}$ . Let  $d$  be one of the components. If a sequence of partial sums is overconvergent at a boundary point of  $d$ , it is overconvergent at every boundary point interior to  $D$  where the function defined by the series in  $d$  is regular. The author also states simple criteria in order that overconvergence shall hold at a particular boundary point or at every such point. Finally he mentions the case in which  $(1/\lambda_n) \log |u_n(x)| \rightarrow u(x)$ ,  $\log n/\lambda_n \rightarrow 0$ , and states interesting applications to the theory of Dirichlet's series.

*Hille* (Princeton, N. J.).

**Takenaka, Satoru:** On the expansion of integral transcendental functions in generalized Taylor's series. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **14**, 529—542 (1932).

Fortsetzung der Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **4**, 262, 401) über die Reihendarstellung

$$f(z) = f(\alpha_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\alpha_n) \int_{\alpha_0}^z dt_1 \int_{\alpha_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n,$$

worin er, an eine Arbeit von Kakeya (dies. Zbl. **4**, 346) anknüpfend, die früheren Abschätzungen verbessert.

*Hille* (Princeton, N. J.).

**Hiong, King-Lai:** Sur les fonctions méromorphes d'ordre infini. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 239—242 (1933).

Im Anschluß an Blumenthal-Denjoy einerseits, F. und R. Nevanlinna andererseits, wird eine Methode skizziert, auch für den Fall unendlicher Wachstumsordnung zu kanonischen Darstellungen meromorpher Funktionen zu gelangen. Durch Kombination von Gedanken der genannten Verff. lassen sich bessere Ergebnisse erzielen, als sie bisher — auch für ganze Funktionen — vorgelegen haben. *Ulrich* (Marburg).

**Selberg, Henrik L.:** Eine Wertverteilungseigenschaft der algebroiden Funktionen. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo Nr **14**, 1—12 (1932).

Verf. setzt seine Untersuchungen zur Frage fort: Wann ist die Umkehrung eines Abelschen Integrals eine (endlich vieldeutige) algebroid Funktion. Sei  $W(\zeta)$  eine



algebraische Funktion, I ein Integral 1. Gattung,  $z(x)$  eine algebroid Funktion,  $\Phi(x) = z'(x)/W(z(x))$ ; damit die Umkehrung des Integrals I algebroid ist, reicht hin, daß  $\Phi$  im Verhältnis zur Wertverteilung von  $z(x)$  wenig Pole hat, d. h. daß II gilt.

$$\text{I: } \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{W(\zeta)} \quad \text{II: } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, \Phi)}{T(r, z)} = 0.$$

Der Fall, daß  $\Phi$  gar keine Pole hat, kann aus einem Satz nach Art des Bloch'schen Satzes elegant erledigt werden. Ulrich (Marburg, Lahn).

**Braitseff, J. R.:** Sur les points singuliers d'une fonction analytique définie par l'intégrale  $\int_0^{\infty} f(t) z^t dt$ . Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 1/2, 81—102 u. franz. Zusammenfassung 102—104 (1932) [Russisch].

L'auteur a déjà donné une méthode pour la détermination des points singuliers des fonctions définies par des séries de Taylor (Rec. math. Soc. math. Moscou 26); dans le présent Mémoire il adapte cette méthode à la recherche des points singuliers des fonctions du type  $\varphi(z) = \int_0^{\infty} f(t) z^t dt$ , considérées sur le plan découpé suivant une demi-droite. En posant

$$F_{\alpha, \varphi}(z) = \sum_0^{\infty} z^n \theta_{\alpha}(n^{\alpha}, e^{i\varphi}); \quad \theta_{\alpha}(n^{\alpha}; e^{i\varphi}) = \int_0^{\infty} \frac{f(t) n^{\alpha t+1} e^{(t+1)\varphi} dt}{\Gamma(\alpha t+2)} \quad (1)$$

l'auteur déduit les points singuliers de  $\varphi(z)$  de ceux de  $F_{\alpha, \varphi}(z)$ . Il suffit de déterminer (pour  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $\alpha \geq 1$ ) les points singuliers de  $F_{\alpha, \varphi}(z)$  situés sur le cercle de convergence de (1); en général,  $F_{\alpha, \varphi}(z)$  ne possède d'ailleurs qu'un seul point singulier sur son cercle de convergence.

Observations: 1. L'auteur paraît ignorer le théorème de Weierstrass sur la conv. unif. des séries de fonctions holomorphes, car après avoir constaté (p. 93, ligne 13) la conv. unif. d'une telle série, il consacre dix lignes à la démonstration séparée de la conv. unif. de la série des dérivées, pour en déduire la dérivabilité (et partant l'holomorphie) de la somme de la première série! — 2. M. Riesz a donné en 1911 (Acta math. 35) une méthode pour la détermination des points singuliers d'une série de Dirichlet, qui se généralise de suite aux fonctions du type  $\varphi(z)$ , et qui est, à l'avis du soussigné, beaucoup plus simple et plus directe que la méthode de l'auteur. Vladimir Bernstein (Milano).

**Dieudonné, J.:** Sur les rayons d'étoilement et de convexité de certaines fonctions. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 37—39 (1933).

Es sei  $P(z)$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, dessen sämtliche Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen. Ferner sei  $\alpha$  eine beliebige reelle Zahl. Man betrachte die Ge-

samtheit der Funktionen  $f(z) = z[P(z)]^{\frac{\alpha}{n}}$ . Verf. gibt explizit die (nur von  $\alpha$  abhängigen) Radien  $r$  und  $\rho$  der größten Kreise um 0 an, deren Bildbereiche bei allen  $f(z)$  schlicht und sternförmig bzw. konvex sind. Die Beweise sollen an anderer Stelle ausgeführt werden. Für  $\alpha = n$  kommt man auf Ergebnisse von Alexander [Ann. of Math. 17, 12—22 (1915)] und Szegő (dies. Zbl. 4, 117) zurück. W. Fenchel.

**Špaček, Lad.:** Contribution à la théorie des fonctions univalentes. Čas. mat. fys. 62, Nr 2, 12—18 u. franz. Zusammenfassung 19 (1932) [Tschechisch].

Es sei  $f(z)$  im  $|z| < 1$  regulär und  $f(z) = 0$  nur für  $z = 0$ . Dann ist  $f(z)$  im Kreise  $|z| \leq r < 1$  schlicht, wenn und nur wenn für beliebige  $t_1$  und  $t_2$ ,  $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$ ,

$$\int_{t_1}^{t_2-2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} r e^{it} dt \neq 0.$$

Besonders ist  $f(z)$  schlicht und sternförmig, wenn und nur wenn bei  $\psi(z) = z f'(z)/f(z)$ ,  $\Re \psi \geq 0$ . Weiter ist  $f(z)$  schlicht, wenn eine komplexe Konstante  $\alpha$  so gefunden werden kann, daß  $\Re(\alpha \psi) \geq 0$ . Für diese zwei Klassen und für die konvexen Funktionen ist dadurch das Koeffizientenproblem vollständig gelöst. Auch die Bieberbach'sche Ver-

mutung  $|a_n| \leq n$  wird für diese Klassen bewiesen. Das Hauptergebnis der Arbeit liegt in der Integralungleichung. Die schlichten Funktionen der Klasse  $\alpha$  waren bisher unbekannt.

Kössler (Prag).

**Takahashi, Shin-ichi:** Über die notwendige und hinreichende Bedingung für die schlichte Abbildung des Einheitskreises. Proc. Imp. Acad. Jap. 8, 344—347 (1932).

In Anlehnung an Calugaréano und Abramesco [C. R. Acad. Sci., Paris 193, 1150—1152 (1931); 194, 834 (1932) — vgl. dies. Zbl. 3, 162; 4, 10] erhält Verf. den Satz: Sei  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  in  $|z| < 1$  reg.; bilden wir  $(u - v)[f(u) - f(v)]^{-1}$

$= \sum a_{r,\mu} u^r v^\mu$  sowie  $\lim \sqrt[n]{R_n} = \frac{1}{R}$  mit  $R_n = |a_{n,0}| + |a_{n-1,1}| + \dots + |a_{0,n}|$ .  $f(z)$

bildet dann und nur dann  $|z| < 1$  schlicht ab, wenn  $\lim \sqrt[n]{R_n} \leq 1$ . (Ist  $R < 1$ , so ist  $R$  der genaue Schlichtheitsradius von  $f(z)$ ). Von hier aus wird dann durch Majorantenbildung für  $R_n$  das bekannte Ergebnis gewonnen: Ist  $\varrho_0$  die positive Wurzel von (1):

$1 = 2|a_2|r + 3|a_3|r^2 + \dots$  (und  $\varrho_0 \leq 1$ ), so bildet die Funktion  $f(z)$  den Kreis  $|z| < \varrho_0$  schlicht ab. [Dies kann man allerdings kürzer erhalten, da ja in  $|z| < \varrho_0$  trivialerweise  $|(f(u) - f(v)) \cdot (u - v)^{-1}| \geq 1 - 2|a_2z| - 3|a_3z^2| - \dots > 0$  ist,  $|u|, |v| \leq |z|$ .] Ebenso leicht ist der Nachweis der weiteren Tatsache, daß der Kreis  $|z| < \varrho_0$  durch  $f(z)$  wie auch durch jeden Abschnitt  $s_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$

von  $f(z)$  [ja sogar durch jede Funktion  $g(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu z^\nu$  mit  $|b_\nu| < |a_\nu|$ ] schlicht

und sternförmig in bezug auf  $z = 0$  abgebildet wird. Verf. fragt ferner nach einer positiven Zahl  $\varrho$  von der Art, daß jede in  $|z| < 1$  reg. schlichte Funktion  $f(z)$  sowie deren sämtliche Abschnitte  $s_n(z)$  den Kreis  $|z| < \varrho$  sternförmig in bezug auf  $z = 0$  (und schlicht) abbilden. Aus einer Note von Bieberbach [Bull. Calcutta Math. Soc. 20, 17—20 (1928)] und aus dem Obigen folgt dann: 1. die Existenz eines solchen  $\varrho$  und 2. für die obere Grenze  $\varrho^*$  aller solcher  $\varrho$ :  $\varrho^* > 0,159 \dots$ . Die weiteren Schlüsse des Verf. über die Sternschränke  $R_s$  können nicht überzeugen [vgl. dies. Zbl. 5, 109 (Marx)]. Peschl.

**Frankl, F.:** Zur Primendentheorie. Rec. math. Soc. math. Moscou 38, Nr 3/4, 66—69 (1931).

Bekanntlich entspricht bei der konformen Abbildung des Einheitskreises auf ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet jedem Peripheriepunkt ein sog. Primende, das auch ein Kontinuum sein kann. Die bisherigen Beispiele enthalten sämtlich neben anderen auch einpunktige Primenden. Verf. konstruiert nun ein Gebiet mit der Eigenschaft, daß bei konformer Abbildung jedem Peripheriepunkt ein ganzes Kontinuum entspricht und daß überdies alle Primenden zueinander fremd sind. S. Warschawski.

**Holzmann, W., et M. Lavrentieff:** Sur l'existence des dérivée-limites. Rec. math. Soc. math. Moscou 38, Nr 3/4, 51—58 (1931).

Der Hauptsatz der Arbeit ist: Es sei  $G$  ein von einer geschlossenen rektifizierbaren Jordankurve  $L$  begrenztes Gebiet; die Krümmung  $k(s)$  von  $L$  als Funktion der Bogenlänge  $s$  sei vorhanden,  $(n-1)$ -mal ( $n \geq 1$ ) differenzierbar, und  $|k^{(n-1)}(s)|$  sei beschränkt. Bildet  $w = f(z)$   $G$  auf eine Halbebene der  $w$ -Ebene ab, so existiert  $f^{(n)}(z)$  auch noch auf  $L$ . — Die Bedingungen für die Existenz von  $f'(z)$  und  $f''(z)$  werden für den Fall umgerechnet, daß  $L$  in einem Punkte eine Ecke der Öffnung  $\alpha > 0$  besitzt und  $f(z)$   $G$  auf einen Winkelraum derselben Öffnung abbildet. Sodann wird unter Benutzung dieses Resultats eine analytische Funktion konstruiert, die das Innere eines gleichseitigen Dreiecks auf ein Kurvenbogendreieck abbildet, dessen Winkel je  $\pi/3$  sind und längs dessen Seiten diese Bedingungen für die Existenz von  $f'(z)$  und  $f''(z)$  erfüllt sind. — Der Hauptsatz selber ist in einem allgemeineren Satz von O. D. Kellogg enthalten.

Stefan Warschawski (Göttingen).

**Nevanlinna, Rolf:** Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen. Comment. math. helv. 5, 95—107 (1933).

Die Note behandelt einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, welche über höchstens 3 Stellen verzweigt sind: dort sind log. Windungspunkte oder schlichte



Blätter zugelassen. Stellt man eine solche Fläche nach Speiser durch einen Baum dar und bezeichnet mit  $\sigma(n)$  die Anzahl der Verzweigungspunkte in der  $n$ -ten Generation

des Baums, so wird die Divergenz der Reihe  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n\sigma(n)}$  als hinreichend dafür nachgewiesen, daß die Fläche vom parabolischen Typus ist (d. h. in die einfach punktierte Ebene abbildbar).  
Ullrich (Marburg, Lahn).

**Hornich, Hans:** Konstruktion von Integralen erster Gattung auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 1, 8—11 (1933).

**Bennett, W. R.:** Note on relations between elliptic integrals and Schlömilch series. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 843—848 (1932).

**Parker, W. V.:** Addition formulas for hyperelliptic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 895—901 (1932).

**Bergmann, Stefan:** Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande. I. J. reine angew. Math. 169, 1—42 (1932).

$\mathfrak{B}$  sei ein offener, schlichter, zusammenhängender Bereich im Raume der beiden komplexen Veränderlichen  $w = u + iv$ ;  $v = x + iy$ .  $F_{\mathfrak{B}}$  sei die Familie der in  $\mathfrak{B}$  regulären Funktionen  $f(w, z)$  mit endlichem  $\int_{\mathfrak{B}} |f|^2 dw - dw$  sei das Volumenelement des  $(u, v; x, y)$ -Raumes —, dann läßt sich jede Funktion aus  $F_{\mathfrak{B}}$  als in  $\mathfrak{B}$  gleichmäßig konvergente Reihe  $\sum c_{\nu} \varphi_{\nu}(w, z)$  darstellen, wobei die  $\varphi_{\nu}(w, z)$  Funktionen aus  $F_{\mathfrak{B}}$  sind, für die gilt:  $\int_{\mathfrak{B}} \varphi_i \bar{\varphi}_k dw = \begin{cases} 0; & i \neq k \\ 1; & i = k \end{cases}$ . Der Kern  $K(u, v; x, y) = \sum |\varphi_{\nu}|^2$  des Systems

der  $\varphi_{\nu}$  ist unabhängig vom speziell gewählten System und deshalb eine reelle Funktion, die nur von der Wahl des Bereiches  $\mathfrak{B}$  abhängt. Es zeigt sich, daß  $|f|^2$ , falls  $f$  aus  $F_{\mathfrak{B}}$ , bei Annäherung an den Rand höchstens von dem Grade unendlich werden kann wie der Kern. Deshalb untersucht Bergmann das Verhalten der Kernfunktion bei Annäherung an den Rand. B. unterscheidet auf Grund der Levischen Bedingung  $L(\varphi)$  pseudokonvexe ( $\sigma > 0$ ), pseudokonkave ( $\sigma < 0$ ) und weder pseudokonvexe noch pseudokonkave Randpunkte ( $\sigma = 0$ ) (s. S. 12). Es wird gezeigt, daß bei Annäherung an pseudokonkave Randpunkte die Kernfunktion und deshalb auch jede Funktion aus  $F_{\mathfrak{B}}$  beschränkt bleibt. Bei Annäherung an pseudokonvexe Randpunkte z. B. an jeden Punkt der Hyperkugel:  $|w|^2 + |z|^2 = 1$  wird der Kern von 3. Ordnung unendlich, bei Annäherung gegen einen Punkt mit  $\sigma = 0$  in vielen Fällen z. B. beim Dizylinder von 2. Ordnung unendlich. — Weiterhin zeigt B., wie man mit Hilfe der Kernfunktion in einem Bereich  $\mathfrak{B}$  mit den obigen Voraussetzungen eine Riemannsche Metrik aufstellen kann, die invariant ist gegen analytische Transformationen (s. S. 5). Welke.

**Bergmann, Stefan:** Über die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 1188—1194 (1932).

Bezeichnet man mit  $A(\psi)$  die untere Grenze der Volumintegrale

$$\int_{\mathfrak{B}} |1 - \nu(w, z) \psi(w, z)|^2 d\omega,$$

wobei  $\nu(w, z)$  die Gesamtheit der in dem Bereiche  $\mathfrak{B}$  regulären, dort nicht verschwindenden Funktionen durchlaufe, so gilt der Satz:  $\psi_k(w, z)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sei eine unendliche Folge von in  $\mathfrak{B}$  quadratintegrierbaren, regulären Funktionen; jedes  $\psi_k(w, z)$  verschwinde in mindestens einem Punkte aus  $\mathfrak{B}$ . Existiert

dann ein  $p > 0$ , so daß  $\sum_{k=1}^{\infty} [A(\psi_k)]^{p/2}$  konvergiert, so gibt es eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion  $f(w, z)$ , die genau die  $\psi_k$  zu Nullfunktionen hat; d. h.  $f/\psi_k$  ist für jedes  $k$  in  $\mathfrak{B}$  noch regulär und  $f(w, z)$  verschwindet nur dort in  $\mathfrak{B}$ , wo auch  $\psi_k$  verschwindet. Aus diesem Satze folgt dann weiter: Existiert zu einer abzählbaren Folge von

Punkten  $P_k(w_k, z_k)$  ein  $p > 0$ , so daß  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/[K_{\mathfrak{B}}(w_k, z_k)]^{p/2}$  konvergiert, so gibt es eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion  $f(w, z) \equiv 0$ , die in den  $P_k$  verschwindet;  $K_{\mathfrak{B}}(w_k, z_k)$  bedeute den Wert der „Kernfunktion“ des Bereiches  $\mathfrak{B}$  im Punkte  $P_k$ . Hieraus ergibt sich unmittelbar: Ist in jedem Randpunkte eines Bereiches  $\mathfrak{B}$  der Limes der Kernfunktion unendlich, so gibt es eine in  $\mathfrak{B}$  reguläre Funktion  $f(w, z)$ , die über keinen Randpunkt von  $\mathfrak{B}$  hinaus fortsetzbar ist.

Thullen (Münster i. W.).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

Reichenbach, Hans: Wahrscheinlichkeitslogik. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 28/31, 476—488 (1932).

In Fortführung seiner Untersuchungen über die Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung [Math. Z. 34, 568 (1932); vgl. dies. Zbl. 3, 354] behandelt Verf. die Beziehungen der Wahrscheinlichkeitstheorie zur mehrwertigen Logik. —  $\varphi x$  sei eine Satzfunktion (z. B.  $x$  ist Element der Klasse  $P$ ). Erteilt man der Variablen  $x$  einen speziellen Wert  $x_1$ , so entsteht die Aussage  $\varphi x_1$ , die nur der Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ fähig ist. Gibt man aber eine Reihe von speziellen Werten  $x_1, \dots, x_n$  vor, so erhält man die Satzfolge  $\varphi x_1, \dots, \varphi x_n$ , ein Gebilde, das charakterisiert werden kann durch die relative Häufigkeit  $h_n$  derjenigen  $x_i$ , die  $\varphi x_i$  wahr machen. ( $h_n$  kann die  $n+1$  Werte  $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}$  annehmen.) Für  $n=1$  ergibt sich die zweiwertige Logik, da  $h=1$  und  $h=0$  den Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ entsprechen. Für  $n > 1$  gelangt man allgemein zu einer mehrwertigen Logik; insbesondere zur dreiwertigen Logik der Modalitäten, indem man  $h=1$ ,  $1 > h > 0$ ,  $h=0$  den Modalitäten „notwendig“, „möglich“ und „unmöglich“ zuordnet. Die eingeführten Begriffe lassen sich auch auf eine unendliche Wahrscheinlichkeitsfolge übertragen, d. h. eine solche Satzfolge, für welche die relativen Häufigkeiten  $h_n$  der Abschnitte  $(x_1, \dots, x_n)$  einen Grenzwert  $p$  besitzen, die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen von  $\varphi x$ ; nur kann  $p$ , im Gegensatz zu den  $h_n$ , eine stetige Wertskala durchlaufen. — Es werden die Verknüpfungen zweier Satzfolgen  $\varphi x_i$  und  $\psi y_j$  untersucht; sie sind den entsprechenden Verknüpfungen des Aussagenkalküls „und“, „oder“ usw. sinngemäß nachgebildet. Jedoch zeigt es sich, daß in der Wahrsch.-Logik im allgemeinen die Wahrheitswerte der Verknüpfung durch die Wahrheitswerte der beiden Satzfolgen allein nicht eindeutig bestimmt sind, ebenso wie man in der Wahrsch.-Rechnung zur Ermittlung der Wahrsch. einer Verknüpfung neben den Einzelwahrscheinlichkeiten noch die sog. Relativwahrsch.  $W(\varphi x_i \ni \psi y_j)$  benötigt. Wesentlich ist, daß sich die mehrwertige Logik, zufolge der Häufigkeitsdeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, extensional auflösen läßt: Die Einzelaussage ist, nach wie vor, nur der beiden Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ fähig, die Mehrwertigkeit ergibt sich erst für Satzfolgen.

V. Bargmann (Berlin).

Fréchet, Maurice: Compléments à la théorie des probabilités discontinues „en chaîne“. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 131—164 (1933).

Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der Markoff'schen Ketten; es werden dabei auch mehrere neue Resultate erhalten. Es seien  $p_{ik}$  die elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten und  $P_{ik}^{(n)}$  die Übergangswahrscheinlichkeiten nach  $n$  Schritten. Wenn die  $P_{ik}^{(n)}$  mit  $n \rightarrow \infty$  gegen die bestimmten von  $i$  unabhängigen Limites  $P_k$  konvergieren, so hat man den regulären Fall. Für die Regularität ist die Existenz solcher  $n$  und  $i$  notwendig und hinreichend, daß  $P_{ik}^{(n)}$  bei jedem  $k$  positiv sind. Es sei weiter  $\Pi_{ik}^{(n)} = (P_{ik}^{(1)} + P_{ik}^{(2)} + \dots + P_{ik}^{(n)})/n$ . Diese Mittelwerte  $\Pi_{ik}^{(n)}$  konvergieren immer mit  $n \rightarrow \infty$  gegen die bestimmten Limites  $\Pi_{ik}$ , welche den folgenden Gleichungen genügen:  $\Pi_{ik} = \sum_j \pi_{ij} \pi_{jk}$ . Verf. gibt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Unabhängigkeit dieser Limites  $\Pi_{ik}$  von  $i$  an. Dagegen haben die  $P_{ik}^{(n)}$  im allgemeinen Falle asymptotisch periodischen Verlauf (Satz von R. v. Mises).



Auch mehrere andere Fragen werden im allgemeinen Falle beliebiger Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ik}$  zum ersten Male ausführlich behandelt. *A. Kolmogoroff*.

**Ostene, Émile:** *Sur les zéros des matrices stochastiques*. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 150—151 (1933).

Durch Gegenbeispiele wird gezeigt, daß drei von Romanovsky [C. R. Acad. Sci., Paris **192**, 266—269 (1931); théorèmes IV, V, VI; vgl. dies. Zbl. **1**, 55] veröffentlichte Sätze falsch sind. Nach Angabe des Verf. kann jedoch ihr passend modifizierter Wortlaut mittels der Methode von Romanovsky leicht begründet werden.

*A. Khintchine* (Moskau).

**Setzer, Ota:** *Le problème de l'aiguille dans un quadrangle*. Čas. mat. fys. **62**, Nr 2, 1—4 u. franz. Zusammenfassung 4 (1932) [Tschechisch].

Auf eine Ebene, die durch ein Netz von kongruenten Vierecken schlicht überdeckt wird, wird eine Nadel geworfen; es wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß keine Kante des Netzes von der Nadel getroffen wird. *Jarník* (Praha).

**Kolmogoroff, A.:** *La méthode de la médiane dans la théorie des erreurs*. Rec. math. Soc. math. Moscou **38**, Nr 3/4, 47—49 u. franz. Zusammenfassung 50 (1931) [Russisch].

Eine zufällige Variable habe die stetige Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x)$  mit der durch  $\int_{-\infty}^m f(x) dx = \frac{1}{2}$  definierten Mediane  $m$ , und es sei  $f(m) > 0$ . Die „empirische“ Mediane von  $n$  gegenseitig unabhängigen Beobachtungswerten werde mit  $m_n$  bezeichnet, und  $\psi_n(x)$  sei die Wahrscheinlichkeitsdichte der zufälligen Variablen  $(m_n - m)/\sqrt{n}$ . Es wird bewiesen, daß für unendlich großes  $n$   $\psi_n(x)$  gegen eine Gaußsche Verteilung mit dem Mittelwert Null und der Streuung  $\sigma_m = 1/2f(m)$  konvergiert. Betrachtet man an Stelle von  $m$  den theoretischen Mittelwert, an Stelle von  $m_n$  das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte, so ergibt sich bei derselben Normierung bekanntlich auch eine Gaußsche Grenzverteilung mit einer gewissen Streuung  $\sigma$ ; der Quotient  $\lambda = \sigma_m/\sigma$  kann als relatives Maß der Güte der beiden Methoden aufgefaßt werden; man kann Beispiele finden, in denen  $\lambda$  einen beliebigen positiven Wert erhält; es wird jedoch behauptet, daß für Verteilungsgesetze mit einem einzigen Maximum stets  $0 < \lambda < \sqrt{3}$  ist.

*A. Khintchine* (Moskau).

**Jacob, M.:** *Über die Charliersche  $\beta$ -Reihe*. Skand. Aktuarie Tidskr. **15**, 286—291 (1932).

The paper begins with a statement of the contributions of Frau Pollaczek-Geiringer and of G. Szegő in establishing conditions under which the Charlier type B series

$$a_0 \psi_0(x) + a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x) + \dots \quad (1)$$

in the usual notation, will converge to an arithmetical distribution function,  $v(x)$ , defined for all integral values of  $x$  ( $x \geq 0$ ). In the present paper a direct proof of the representation of the function is given in which the restrictions are less stringent than in the previous proofs. It is proved that the series (1) converges to  $v(x)$  in case

$\sum_{x=0}^{\infty} v(x) \frac{(\psi_0(x))^{-1}}{1+x} < \infty$ . — In the proof, much use is made of the orthogonal property of the polynomial  $p_n(x)$  defined by

$$\psi_n(x) = \psi_0(x) p_n(x).$$

In an addendum, it is noted that Uspensky (1931) gave a proof of the convergence of (1) if the power series  $\sum_{v=0}^{\infty} v(x) z^v$  converges in a circle of radius  $R > 2$ , and that E. Schmidt appears to have given a proof thus far unpublished under general conditions which are not only sufficient but necessary. *H. L. Rietz* (Iowa).

**Vacek, Miloš:** Sur la loi de Polya régissant les faits corrélatifs. *Aktuár. Vědy* 3, 18—28 u. 49—61 (1932).

Der Verf. setzt Gedankengänge von Pólya (Pólya-Eggenberger: Über die Statistik verketteter Vorgänge. *Z. angew. Math. Mech.* 1923) auseinander und wendet sie auf Daten der tschechischen Statistik an. — Pólya kommt zu einer Verallgemeinerung des Poissonschen Gesetzes  $\frac{e^{-h} h^r}{r!}$  („Gesetz der kleinen Zahlen“). Bekanntlich gilt dieses Gesetz nur für unabhängige seltene Ereignisse, nicht aber für solche, die in Korrelation stehen. Es ist z. B. nicht anwendbar auf die statistische Untersuchung ansteckender Krankheiten, weil hier das Eintreten eines Krankheitsfalles die Wahrscheinlichkeit des weiteren Eintretens erhöht, also jedenfalls verändert. Für solche korrelative seltene Ereignisse hat Pólya folgendes Schema angegeben: Man zieht eine Kugel aus einer mit  $R$  weißen und  $S$  schwarzen Kugeln gefüllten Urne, stellt ihre Farbe fest und legt  $1 + \Delta$  Kugeln dieser Farbe in die Urne zurück. Der Fall  $\Delta = 0$  liefert das „Bernoullische Schema“ unabhängiger Ereignisse, auf dem das Poissonsche Gesetz beruht. Im Falle  $\Delta \neq 0$  aber hat man Korrelation. Setzt man  $R + S = N$ ,  $\varrho = R/N$ ,  $\sigma = S/N$  und  $\delta = \Delta/N$ , so wird die Wahrscheinlichkeit, in  $n = r + s$  Zügen  $r$  weiße und  $s$  schwarze Kugeln zu ziehen,

$$p_{rs} = \binom{n}{r} \frac{\varrho(\varrho + \delta) \dots (\varrho + [r-1]\delta) \sigma(\sigma + \delta) \dots (\sigma + [s-1]\delta)}{1 \cdot (1 + \delta) \dots (1 + [n-1]\delta)}.$$

Der Grenzübergang  $\lim n = \infty$  liefert, wenn man voraussetzt, daß  $\lim n\varrho = h$  sowie  $\lim n\delta = d$  existiert,

$$\lim p_{rs} = P_r = \frac{h(h+d) \dots (h + [r-1]d)}{r! (1+d)^{\frac{h}{d} + r}}, \quad [r = 1, 2, \dots]$$

$$P_0 = (1+d)^{-\frac{h}{d}}.$$

Dieses Pólyasche Gesetz geht in dem Spezialfalle  $\lim d = 0$  wieder in das Poissonsche über. — Der Parameter  $h$  hat die Bedeutung des Mittelwertes der Variablen  $r$ , d. h.

es ist  $h = \sum_{r=0}^{\infty} r P_r$ . Das Quadrat des mittleren Fehlers  $\mu$  ist

$$\mu^2 = \sum_{r=0}^{\infty} (r-h)^2 P_r = h(1+d),$$

woraus sich die Bedeutung von  $d$  ergibt. — Der Verf. hat eine tschechische Statistik aus den Jahren 1921—1929 über Todesfälle durch ansteckende Krankheiten bearbeitet. Es ergibt sich leidliche Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. Abweichungen kann man teilweise durch „Unhomogenität“ der statistischen Reihen erklären (z. B. Einfluß der Jahreszeit). — Der Verf. kommt zu dem Schluß, daß das Gesetz von Pólya keine völlige Allgemeingültigkeit für seltene korrelative Ereignisse hat.

Sternberg (Breslau).

**Jeffreys, Harold:** On the prior probability in the theory of sampling. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 29, 83—87 (1933).

**Knoll, Franz:** Zur mathematischen Theorie der Versicherung. *Bl. Versich.-Math.* 2, 327—333 (1933).

Die erkenntnistheoretische, axiomatische Formulierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat kürzlich [siehe z. B. v. Mises, Vorlesungen aus dem Geb. d. angew. Math. 1, 41 (1931)] große Fortschritte gemacht; gleichzeitig fordert die Praxis [siehe z. B. Burrau, *Z. ges. Versich.-Wiss.* 22 (1922), und Riebesell, *Versich. u. Geldwirtschaft* 2 (1926)] bessere Fundamentierungen der Versicherungsmathematik. Verf. bringt Beiträge zur Förderung der Vereinigung der zwei angedeuteten Problemstellungen.

Burrau (Kopenhagen).



**Breuer, S.: Die Wahrscheinlichkeit der Trefferzahl und die Versicherung verbundener Leben.** Versicherungsarch. 3, 465—486 (1932).

Der Verf. behandelt die folgenden Probleme: I. Aus  $n$  Urnen, die mit weißen und schwarzen Kugeln in verschiedener Zusammensetzung gefüllt sind, zieht man in  $n$  Zügen je eine Kugel. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer weißen Kugel aus der  $i$ -ten Urne sei  $p_i$  [ $i = 1, 2, \dots, n$ ]. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten  $w_{k(n)}$  und  $W_{k(n)}$  dafür, daß die „Trefferzahl“ genau  $k$  bzw. mindestens  $k$  ist? Unter Trefferzahl ist die Gesamtzahl der in den  $n$  Zügen gezogenen weißen Kugeln zu verstehen. — IIa. Es schließen  $n$  Personen vom Alter  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eine Leibrentenversicherung mit der Maßgabe ab, daß jährlich pränumerando die Rente in der Höhe  $r_n$  bzw.  $r_{n-1} \dots$  bzw.  $r_1$  ausgezahlt wird, solange noch  $n$  bzw.  $n-1 \dots$  bzw. 1 Person leben. Wie groß ist die Einmalprämie  $a_{(n)}$ ? — IIb. Dieselben Personen schließen eine Todesfallversicherung ab, wonach beim ersten Tode die Summe  $s_1$ , beim zweiten  $s_2, \dots$  beim  $n$ -ten  $s_n$  bezahlt wird. Welches ist die Einmalprämie  $A_{(n)}$ ? — Beim Problem IIa soll  $a_{(n)}$  durch die Barwerte  $a_{x_1}, a_{x_2}, \dots, a_{x_1 x_2}, \dots, a_{x_1 x_2 \dots x_n}$  der Verbindungsrenten vom Betrage 1 ausgedrückt werden. Analoges gilt für IIb. — Die Lösung der obigen Aufgaben macht an sich keine Schwierigkeiten. Es handelt sich aber darum, die Lösung in eine numerisch brauchbare Form überzuführen. — Führt man in I. die symmetrischen Grundfunktionen  $S_i$  der  $p_i$  ein, so ergibt sich leicht

$$w_{k(n)} = \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_n S_n,$$

wobei die  $\alpha_i$  von den  $p_i$  unabhängig sind. Für die  $\alpha_i$  findet man ein lineares Gleichungssystem, nämlich

$$\binom{s}{1} \alpha_1 + \binom{s}{2} \alpha_2 + \dots + \binom{s}{s} \alpha_s = \delta_s, \quad [s = 1, \dots, n]$$

worin

$$\delta_s = \begin{cases} 1 & \text{für } s = k \\ 0 & \text{für } s \neq k \end{cases} \text{ ist.}$$

Die Auflösung kann man mit Hilfe des Matrizenkalküls gewinnen:

$$\alpha_m = (-1)^{m-1} \binom{m}{1} \delta_1 + (-1)^{m-2} \binom{m}{2} \delta_2 + \dots + \binom{m}{m} \delta_m. \quad [m = 1, \dots, n]$$

Auch die Bestimmung von  $W_{k(n)}$  und die Lösung von II. führt zu ähnlichen linearen Gleichungen. — Die obigen Probleme wurden bereits von Dr. A. Berger in Bl. für Versich.-Math. 1 (Wien 1930) behandelt, die Linearsysteme aber teilweise nur für spezielle Beispiele gelöst, während Breuer die allgemeine Lösung gibt. Er behandelt schließlich in II. neben einmaliger noch laufende Prämienzahlung, wonach eine jährliche Prämie in Höhe von  $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1$  zu entrichten ist, solange noch genau  $n, n-1, \dots, 1$  Versicherungsnehmer leben, und gibt Bedingungen an, denen die  $r_i$  genügen müssen, damit die Nettoreserve niemals negativ wird. *Sternberg.*

**Cantelli, F. P.: Sulla possibilità della costruzione delle tavole di mortalità quando si sconoscano i numeri degli esposti al rischio di morte.** Atti Ist. naz. Assicuraz. 4, 179—186 (1932).

Zur Aufstellung von Sterblichkeitstafeln ist die Formel  $\mu(t) = \frac{\delta(t)}{\lambda(t)}$  gut brauchbar, in welcher  $\mu(t)$  die Sterbensintensität,  $\delta(t)$  die Anzahl der während der Beobachtungsperiode im Alter zwischen  $t - \frac{1}{2}$  und  $t + \frac{1}{2}$  gestorbenen und  $\lambda(t)$  die Anzahl der in der Beobachtungsperiode „unter Risiko“ befindlichen  $t$ -jährigen bedeutet. Die  $\delta(t)$  sind aus den Aufzeichnungen einer Gesellschaft leicht, die  $\lambda(t)$  nur mühsam zu finden. Daher hat A. Fisher ein Verfahren vorgeschlagen, welches die Möglichkeit zu bieten scheint, eine Sterbetafel nur auf Grund von Zahlen  $\delta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  herzustellen, wo  $\delta_i(t)$  die Anzahl der im Altersintervall  $\langle t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2} \rangle$  in der Beobachtungsperiode an der  $i$ -ten Todesursache Verstorbenen bedeutet, sofern mindestens nach zwei Todesursachen ( $n \geq 2$ ) getrenntes Material vorhanden ist. Das würde allerdings zu der unerwünschten Folgerung führen, daß zwei Gesellschaften, welche dieselben  $\delta_i(t)$  zugrunde legen, unabhängig von ihren  $\lambda(t)$  zu denselben Sterblichkeitstafeln gelangen müßten. Verf. weist die Quelle des Trugschlusses in der Herleitung des Ver-

fahrens auf und knüpft daran weitere Bemerkungen, aus welchen hervorgeht, daß die Kenntnis der  $\lambda(t)$  nicht entbehrt werden kann.

*Birnbaum* (Lwów).

**Cultrera, Raffaele:** Gli elementi costitutivi del premio puro di un'assicurazione sulla vita. Atti Ist. naz. Assicuraz. 4, 209—221 (1932).

Auf Grund eines Versicherungsvertrages soll ein Kapital  $C_t$  zur Auszahlung gelangen, wenn der Versicherte im  $t$ -ten Versicherungsjahr stirbt ( $t = 1, 2, \dots, n$ ), und ein Kapital  $C'_n$ , falls er das Ende des  $n$ -ten Jahres erlebt. In naheliegender Abänderung der üblichen Terminologie bezeichnet Verf.  $C'_n \cdot \frac{v^n}{a_n|}$  als „Sparprämie“,  $V_t = C'_n \cdot \frac{v^n}{a_n|} \cdot \sum_{\gamma=1}^t (1+i)^\gamma$  als „Reserve“ nach  $t$  Jahren,  $C_t - V_t$  als „Risikokapital“. Besteht die Beziehung  $C_{t-1} - vC_t = \text{constans}$ , oder nimmt  $C_t$  in arithmetischer Progression zu, so gilt die Darstellung  $K(t) = \alpha a_{n-t}| + \beta[(t-1)a_{n-t}| + (I)a_{n-t}|] + \gamma \cdot v^{n-t}$  mit konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$ . Die jährliche Prämie kann demnach in folgende Bestandteile zerlegt werden: 1. Sparprämie im oben erklärten Sinne, 2. jährliche Prämie für eine Rente vom Betrage  $\alpha$ , welche vom Tode des Versicherten bis zum Endtermin der Versicherung zahlbar ist, 3. jährliche Prämie für eine wachsende Rente, welche in derselben Zeit zahlbar ist, 4. jährliche Prämie für ein Kapital, welches zu festem Termin (Endtermin) zahlbar wird, wenn der Versicherte vorher stirbt. Falls die Prämienzahlungsdauer nicht mit der Versicherungsdauer übereinstimmt, kommt noch ein Bestandteil hinzu. Diese Zerlegung der Prämie wird für die gangbarsten Versicherungsarten explizit durchgeführt. Ähnliche Ergebnisse gelten für Einmalprämien. *Birnbaum* (Lwów).

**Jacob, M.:** Sul concetto di somma sotto rischio. Giorn. Ist. Ital. Attuari 3, 305 bis 310 (1932).

Die Bezeichnungen der vorstehend referierten Arbeit von Cultrera werden folgendermaßen verallgemeinert: Die Zahlen  $P_t^{(s)}$  ( $t = 1, \dots, n$ ) heißen Sparprämien, wenn  $\sum_{t=1}^n P_t^{(s)} v^{n-t+1} = C'_n$  gilt; als Reserve nach  $t$  Jahren wird  $V_t = \sum_{\sigma=1}^t P_\sigma^{(s)} v^{t-\sigma+1}$ , als Risikokapital  $C_t - V_t$  bezeichnet; ist eine Folge von Prämien  $P_t$  gegeben, welche dem Äquivalenzprinzip

$$\sum_{t=1}^n P_{t \cdot t-1} E_x = \sum_{t=1}^n C_t \frac{C_{x+t-1}}{D_x} + C'_n \cdot n E_x \quad (*)$$

genügt, so heißt  $P_t - P_t^{(s)} = P_t^{(r)}$  Risikoprämie. Verf. beweist: 1. Immer gilt

$$K(t) = C_t - C'_n v^{n-t} + \sum_{\sigma=t+1}^n P_\sigma^{(s)} v^{\sigma-t-1} \quad (**)$$

und das bedeutet, daß der durch den Tod des Versicherten im  $t$ -ten Versicherungsjahr für die Gesellschaft entstehende Schaden sich aus zwei Bestandteilen zusammensetzt: aus dem Verlust, welcher durch die Auszahlung von  $C_t$  nach  $t$  Jahren anstatt der Auszahlung von  $C'_n$  nach  $n$  Jahren verursacht wird, und aus dem Entgang aller künftigen Sparprämien. 2. Wenn bei gegebenen  $C_t, C'_n, P_t^{(s)}$  eine Folge von Zahlen  $K(t)$  durch (\*\*) erklärt wird, so sind die Zahlen  $P_t^{(r)} = v \cdot q_{x+t-1} \cdot K(t)$  Risikoprämien, d. h. die Prämien  $P_t = P_t^{(s)} + P_t^{(r)}$  genügen dem Äquivalenzprinzip (\*). Aus (\*\*) ergibt sich durch Spezialisierung die Darstellung von Cultrera (vgl. vorst. Ref.). *Birnbaum*.

**Sibirani, F.:** Intorno alle assicurazioni sulla vita con rimborso di premi capitalizzati. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 1—9 (1933).

**Crosato, P.:** Sulla variazione delle rendite al variare del tasso d'interesse. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 10—25 (1933).

**Zaula, F.:** Un metodo di calcolo approssimativo delle riserve di premio per le assicurazioni sulla vita a premi acceleratamente decrescenti. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 26—43 (1933).

**Vajda, S.:** Sulle tavole selezionate e tavole aggregate da esse derivate. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 44—70 (1933).



## Geometrie.

**Thébault, V.:** Sur les points de Feuerbach. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles A* 52, 288—292 (1932).

**Thébault, V.:** Orthopôle et théorème de Droz-Farny. *Gaz. mat.* 38, 161—163 (1933).

**Mineur, Ad.:** Des droites de Simson et de l'orthopôle. *Mathesis* 46, 357—360 u. 450 bis 453 (1932).

**Backes, F.:** Note sur le tétraèdre. *Mathesis* 47, 12—14 (1933).

**Beatty, S., and A. E. Johns:** On the bilinear transformation in the real plane. *Trans. Roy. Soc. Canada, III. s.* 26, 1—14 (1932).

Die reellen nichtaffinen Kollineationen der Ebene werden unter metrischem Gesichtspunkt klassifiziert. Dabei wird davon ausgegangen, daß es in diesem Falle stets genau zwei reelle Punkte gibt, in deren Umgebung die Abbildung konform ausfällt. Das Mittellot ihrer Verbindungsstrecke ist der Vorgänger der unendlich fernen Graden. Diese und alle daraus folgenden Ergebnisse werden rechnerisch abgeleitet. Nach Ansicht des Ref. ist das Problem besser der synthetischen Methode zugänglich. Man vergleiche z. B. Reye, *Geometrie der Lage*, 2, Anhang „Fokale Eigenschaften kollinearer Felder“, wo auch weitere Literatur aus den Jahren 1852 und 1869 angegeben ist.  
*Cohn-Vossen (Köln).*

**Beatty, S.:** A note on the projective transformation in the complex plane. *Trans. Roy. Soc. Canada, III. s.* 26, 15—17 (1932).

Bemerkungen zu dem Problem, bei einer linearen gebrochenen Transformation der Zahlenebene alle Kreise anzugeben, die ihre Größe nicht ändern; im Anschluß an das Buch von Ford: *Automorphic Functions* (McGrawhill 1929). *Cohn-Vossen.*

**Goormaghtigh, R.:** Sur les propriétés infinitésimales de l'affinité complexe. *Mathesis* 47, 14—19 (1933).

**Werres, Anton:** Die systematische Stellung ebener Projektivitäten. Bonn: Diss. 1932. 39 S.

Abbildung der Gesamtheit der nicht ausgearteten und der geeignet definierten „uneigentlichen“ ebenen Korrelationen auf die Punkte einer  $M_7^3$  des  $R_8$ . *Moufang.*

● **Study, E.:** Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. III. Das Imaginäre in der ebenen Geometrie. 2. Tl., § 1—§ 8. (Eduard Studys hinterlassene Manuskripte. Hrsg. v. E. A. Weiss. H. 1.) Bonn 1933. 101 S.

Cette œuvre posthume de E. Study se rattache à son Mémoire Sugli enti analitici [*Rend. Circ. mat. Palermo* 21 (1906)], et aux travaux de C. Segre [*Atti Accad. Sci. Torino* 25—26 (1890), *Math. Ann.* 40 (1891) et *Rend. Circ. mat. Palermo* 5 (1891)] sur la géométrie complexe. C'est un exposé des questions qui se posent lorsque l'on veut étendre, à plusieurs variables, les représentations classiques d'une variable complexe avec les points (réels) d'un plan de Argand et Gauss ou d'une sphère de Riemann; il ne tient pas compte, naturellement, des travaux plus récents sur le sujet [v. p. ex., E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris 1931); B. Segre, *Rev. mat. hisp.-amer.* 1928, et *Rend. Semin. mat. Roma (II)* 7 (1931)]. — Les susdites questions sont énoncées d'abord dans l'Introduction, et développées successivement dans huit paragraphes, en se bornant à deux variables complexes. Le § 1 assume comme distance (réelle) de deux points  $(\xi_1, \eta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2)$  du plan complexe  $(\xi, \eta)$ , la racine carrée de la forme hermitienne  $(\xi_2 - \xi_1)(\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1) + (\eta_2 - \eta_1)(\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1)$  [ $\bar{a}$  indique le nombre complexe conjugué de  $a$ ], et étudie la métrique hermitienne (parabolique) qui s'en ensuit. Les points de la droite à l'infini sont assujettis par les mouvements hermitiens du plan à un groupe  $G_3$  de transformations, qui est isomorphe au groupe des rotations autour d'un point dans l'ordinaire espace euclidien  $R_3$  (§ 2). L'étude de ce deux groupes est facilitée par l'introduction des quaternions, dont la théorie est ébauchée au § 3, ce qui permet aussi de donner une

simple représentation analytique des rotations hermitiennes du plan. Le § 4 traite, toujours au moyen des quaternions, du groupe  $G_6$  des rotations autour d'un point dans l'espace  $R_4$  euclidien à 4 dimensions; chaque transformation de  $G_6$  peut être décomposée, en deux façons différentes, dans le produit de deux rotations d'un certain type, appartenant à deux sousgroupes invariants: d'ici découle une double représentation des mouvements de  $R_4$  et des transformations (projectives) de sa quadrique-absolu en soi même, moyennant les quaternions. — La géométrie hermitienne du plan complexe  $(\xi, \eta)$ , est étroitement liée avec la géométrie euclidienne de l' $R_4$  réel, dont les points ont pour coordonnées la partie réelle et la partie imaginaire de  $\xi$  et de  $\eta$ ; et précisément (§ 5), le groupe  $G_8$  des mouvements hermitiens du plan admet comme image dans  $R_4$  un sousgroupe du groupe  $G_{10}$  des mouvements, constitué par les transformations de  $G_{10}$  qui laissent fixes deux certaines droites complexes conjuguées,  $r'$  et  $r''$ , de la quadrique-absolu de  $R_4$  (avec la terminologie plus récente, ce sont les transformations de  $G_{10}$  qui sont pseudoconformes). Les droites imaginaires  $r'$  et  $r''$  sont les directrices d'une congruence de droites (réelles), dans l'espace à l'infini de  $R_4$ ; en assimilant ces droites à des points (comme on fait pour la droite à l'infini du plan de Argand et Gauss), on déduit (§ 6) de  $R_4$  un autre espace clos,  $\mathfrak{R}_4$ , qui est la véritable image réelle du plan projectif complexe, analogue du plan de Argand et Gauss. Dans  $\mathfrak{R}_4$  il y a deux systèmes remarquables de plans, nommés par E. Study plans caractéristiques et plans synectiques: ce sont ordonnément les plans qui passent par  $r'$  ou par  $r''$ , et les plans qui s'appuyent à ces deux droites à la fois [dans B. Segre, trav. cit., ces plans sont respectivement appelés plans nuls et plans caractéristiques]. Au moyen d'eux, au § 7 est effectuée l'étude des images en  $\mathfrak{R}_4$  des transformations projectives et anti-projectives du plan; la considération des points complexes de  $\mathfrak{R}_4$  simplifie l'exposition, et permet de donner une ultérieure extension du champ ternaire, avec sa représentations dans un espace  $\mathfrak{R}_8$ . — Le dernier paragraphe est consacré à l'étude de la représentation du plan complexe sur la  $M_4^6$  de C. Segre, qui constitue l'analogue de la sphère de Riemann. L'affinité entre les deux représentations est soulignée par plusieurs propositions; entre autre que chaque droite du champ ternaire admet pour image, dans la  $M_4^6$  de C. Segre, une sphère de Riemann de rayon unitaire; il y a cependant des différences, qui sont dans la nature des choses, comme le montrent d'autres théorèmes dont les démonstrations sont à peine esquissées [voir ce Zbl. 3, 68 (Cartan) et 213 (Segre)].

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Gerhards, Karl: Nichteuklidische Kinematographie.** Naturwiss. 1932, 925—928.

Wiederholt sind seit Helmholtz die Wahrnehmungen geschildert worden, die ein Beobachter machen würde, wenn die Körper unseres Raums nicht im euklidischen Sinn, sondern im Sinn einer hyperbolischen Cayleyschen Metrik starr wären. Zur Entscheidung der Frage, ob die euklidische Raumstruktur apriorisch bevorzugt sei, wird es beitragen, wenn man entscheidet, ob ein solcher Beobachter nach einiger Gewöhnung die im Sinn der hyperbolischen Metrik starren Körper wieder als starr empfindet. Verf. gibt nun einige vorläufig primitive psychologische Versuche in dieser Richtung an. Ein hyperbolischer Kreis mit einigen Durchmessern (Rad mit Speichen) wird, wenn er nicht im euklidischen Mittelpunkt der Cayleyschen Fundamentallfläche liegt, durch eine Ellipse mit einigen Sehnen durch irgendeinen inneren Punkt  $P$  der Ellipse dargestellt. Ist die Fundamentallfläche keine Kugel, so kann die Ellipse auch ein Kreis sein, mit  $P$  als exzentrischem Innenpunkt. Die „Drehung“ eines solchen „Rades“ um seinen festgehaltenen „Mittelpunkt“  $P$  wird dem gewöhnlichen, euklidisch eingestellten Beobachter als ein periodischer Deformationsprozeß erscheinen. Verf. stellt nun diese Quasidrehung durch geometrisch konstruierte Stroboskopbilder dar, wobei 8 „äquidistante Durchmesser“ eingetragen sind. Läßt man diese Bilder so ablaufen, daß eine „Umdrehung“ etwa 8 Sekunden dauert, so entsteht ein paradoxer psychologischer Eindruck: Das „Rad“ erscheint als starr, aber der Punkt  $P$  wird als



exzentrisch empfunden (also ein geometrisch widerspruchsvolles Bild). Analoge Resultate ergeben sich, wenn man hyperbolische Kugeln statt Kreise stroboskopisch in Quasidrehung darstellt. Verf. stellt als möglich hin, daß auch der Eindruck der Exzentrizität des hyperbolischen Mittelpunktes sich verlieren wird, wenn man die Quasidrehung schneller vorführt. Dann würde also eine so einfache Beobachtung genügen, um den Beobachter auf den hyperbolischen Starrheitsbegriff psychologisch umzustellen.

Cohn-Vossen (Köln).

**Mordoukhay-Boltovsky, D.:** Sur quelques problèmes de la mécanique céleste dans l'espace non-Euclidien. J. Cycle math. 2, 47—69 u. franz. Zusammenfassung 70 (1932) [Ukrainisch].

Die Bewegung eines Punktes in einem dreidimensionalen Raum der konstanten Krümmung  $\pm \frac{1}{k^2}$ , unter der Wirkung einer Zentralkraft, wird untersucht. Die Zeit wird als ein invarianter Parameter betrachtet, und die Bewegungsgleichungen werden in einer früher vom Verf. abgeleiteten Form geschrieben (Verh. d. Ges. d. Naturforscher in Smolensk 1930):

$$m\ddot{x} = \frac{mv^2x}{k^2} + \frac{xzF}{k\sqrt{z^2-1}},$$

$$m\ddot{y} = \frac{mv^2y}{k^2} + \frac{yzF}{k\sqrt{z^2-1}},$$

$$m\ddot{z} = \frac{mv^2z}{k^2} + F\frac{\sqrt{z^2-1}}{k};$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - k^2 z^2$$

(hyperbolischer Fall, für den elliptischen ist  $k$  durch  $ik$  zu ersetzen). Dabei sind  $x, y, z$  ( $x^2 + y^2 - k^2 z^2 = -k^2$ ) die Weierstrassschen Koordinaten in einer Ebene. Es sind die Kraftgesetze:

$$F = -\frac{\text{konst. } mm'}{k^2 Sh^2 \frac{R}{k}} \quad \text{und} \quad F = -\frac{\text{konst. } mm'}{R^2}$$

( $R$  geodätische Entfernung der Massenpunkte  $m, m'$ ). Es wird gezeigt, daß die auf Grund dieser Gesetze berechnete Perihelbewegung des Merkur (für vernünftige Werte des Krümmungsparameters  $k$ ) zu klein ist. Es wird die Anziehung eines Massenpunktes von einer Kugel berechnet und gezeigt, daß nur in einem Euklidischen Raum diese Anziehung der in ihrem Mittelpunkt konzentrierten Masse äquivalent ist. Die dadurch verursachten Störungen sind aber zu klein, um die Perihelbewegung zu erklären. Es wird weiter gezeigt, daß nur im Euklidischen Raume geschlossene Bahnen unter der Wirkung einer Zentralkraft möglich sind.

M. Leontowitsch (Moskau).

### Algebraische Geometrie:

**Severi, Francesco:** Quelques théories nouvelles en géométrie algébrique. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 229—231 (1933).

Il s'agit de résultats de la plus haute importance, qui ouvrent une voie nouvelle en géométrie algébrique. — Deux groupes de  $n$  points d'une surface  $F$  sont nommés équivalents, lorsque, en dehors de points communs, ils sont des groupes caractéristiques de quelque réseau de courbes, tracé sur  $F$ , ou se réduisent à de tels groupes en ajoutant deux groupes de points équivalents sur une courbe — irréductible ou réductible — de  $F$  [les notions de groupes équivalents et de série d'équivalence sur les courbes réductibles, ont été introduites au préalable par l'a.: v. F. Severi, Mem. Accad. Ital. 3; ce Zbl. 5, 211]; ladite relation est transitive. Une série d'équivalence  $|G|$  sur  $F$ , est l'ensemble de groupes équivalents à  $G$ ; on peut opérer sur les séries d'équivalence par addition et soustraction, etc. — L'a. a étudié les 5 types suivants de séries d'équivalence: 1° Séries de monoéquivalence; deux groupes quelconques sont équivalents sur quelque courbe (irréductible ou réductible)

de  $F$ . 2° Séries intersections complètes (qui comprennent, comme cas particulier, les séries caractéristiques des systèmes linéaires), découpées par les courbes de deux systèmes linéaires, tracés sur  $F$ ; elles sont rationnelles. 3° Séries intersections partielles, coupées par les courbes de deux systèmes linéaires, hors de groupes de points variables dans une série d'équivalence sur une courbe fixe (irréductible ou réductible) de  $F$ . 4° Séries rationnelles ou unirationnelles; elles sont contenues totalement dans des séries du type 1°. 5° Séries découpées sur une surface de  $S_3$  par les courbes d'une même famille de  $S_3$ . — Les séries (irréductibles) de  $\infty^r$  ( $r \geq 2$ ) groupes  $G$  de  $n$  points de  $F$  peuvent aussi être étudiées au point de vue topologique, en représentant birationnellement les  $G$  d'une telle série,  $\sigma$ , avec les points d'une  $V_r$ , et en considérant la correspondance  $T$  qui s'ensuit entre  $V_r$  et  $F$ . À ce point de vue on doit particulièrement distinguer: a) Séries à circulation linéaire nulle; la  $T$  transforme tout cycle linéaire de  $V_r$  en un cycle nul de  $F$ . Une entreprise par G. Albanese (ce Zbl. 4, 413). La condition nécessaire telle série est contenue totalement dans une série régulière, dont l'étude a été et suffisante pour qu'une série  $\sigma$  soit à circulation linéaire nulle, c'est que toute forme différentielle linéaire de première espèce de  $F$  [dans le sens de E. Cartan, transporté par E. Kähler, Mem. Accad. Ital. 3 (1932), mat. n. 3, au domaine algébrique] donne une somme nulle dans un groupe  $G$  variable en  $\sigma$ . b) Séries à circulation superficielle algébrique; la  $T$  transforme tout cycle à deux dimensions de  $V_r$  en un cycle algébrique de  $F$ . La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série  $\sigma$  soit à circulation superficielle algébrique, c'est que toute forme différentielle quadratique de première espèce donne en  $G$  une somme nulle (cette propriété constitue l'extension du théorème d'Abel aux intégrales doubles de première espèce). c) Séries à cyclo-torsion nulle; la  $T$  transforme tout diviseur de zéro de  $V_r$  en un cycle nul de  $F$ . — Les séries des types 1°, 2°, 3°, 4°, 5° ci-dessus (et peut-être toutes les séries d'équivalence) jouissent des propriétés a), b), c); en outre toutes les formes tensorielles de première espèce [introduites de même par E. Kähler, l.c.] donnent des sommes nulles dans un groupe  $G$  variable dans une telle série.

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Severi, Francesco: Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica.** Mem. Accad. Ital., Mat. 3, Nr 5, 1—52 (1932).

Im 1. Teil dieser Arbeit werden die Grundbegriffe der geometrischen Theorie der Punktgruppenscharen auf reduzible Kurven ausgedehnt. Eine „Äquivalenzschar“ von Punktgruppen auf einer zerfallenden Grundkurve wird so definiert: ihr allgemeines Element wird (von festen Punkten abgesehen) von dem allgemeinen Element einer linearen Formenschar aus der Grundkurve ausgeschnitten. Diejenigen Punktgruppen, die durch Grenzübergang aus diesem allgemeinen Element erhalten werden können, bilden die Äquivalenzschar. Jede Äquivalenzschar ist in einer einzigen Vollschar enthalten. Hauptsatz: Jede Vollschar entsteht durch Zusammensetzung aus Vollscharen der irreduziblen Bestandteile der Grundkurve. Daraus folgt die birationale Invarianz des Begriffs der Äquivalenzschar bei birationalen Transformationen der einzelnen irreduziblen Bestandteile. — Diese Theorie wird als Hilfsmittel im 2. Teil der Arbeit benutzt, in welchem die Untersuchungen des Verf. über Scharen von Punktgruppen auf einer algebraischen Fläche (dies. Zbl. 5, 176) fortgesetzt und erweitert werden. Während in der zitierten Arbeit rationale Äquivalenzscharen von Punktgruppen (Hauptserien) betrachtet wurden, werden die darauf bezüglichen Sätze hier auf solche Scharen erweitert, welche eine rationale Parameterdarstellung besitzen. Weiter werden zwei neue birationale Invarianten  $s_1$  und  $s_2$  definiert:  $s_1 + 1$  ist die kleinste Anzahl allgemein gewählter Punkte auf der Fläche, die mindestens eine  $g_{s_1+1}^1$  definieren;  $s_2 + 1$  ist die kleinste Anzahl, die mindestens eine Hauptserie auf der ganzen Fläche definieren. Die kanonische Schar, die in der zitierten Arbeit nur für irreguläre Flächen definiert



war, wird jetzt als virtuelle Schar von Punktgruppen für beliebige Flächen durch die Formel  $J - (A, A) - 2(A, A')$  definiert, wo  $|A|$  ein Kurvenbüschel auf der Fläche,  $A'$  eine adjungierte Kurve und  $J$  die Jakobische Gruppe des Büschels ist.

van der Waerden (Leipzig).

**Wong, B. C.: On certain characteristics of  $k$ -dimensional varieties in  $r$ -space.** Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 725—730 (1932).

Eine algebraische Mannigfaltigkeit von der Dimension  $k$  im  $r$ -dimensionalen Raume  $S_r$  hat außer der Ordnung  $n$  mehrere charakteristische Zahlen. In dieser Note betrachtet der Verf. eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $V_k$ , welche der vollständige Schnitt der  $r - k$  Hyperflächen von den Ordnungen  $n_1, n_2, \dots, n_{r-k}$  ist, und erhält die Beziehungen zwischen den charakteristischen Zahlen der Mannigfaltigkeit. Wenn man  $V_k$  aus einem allgemeinen  $S_{t-1}$  im Raume  $S_{2k+1}$  auf einen  $S_{2k+1-t}$  [ $0 \leq t \leq k$ ] im  $S_{2k+1}$  projiziert, so erhält man eine  $V_k^{(t)}$ , welche eine doppelte  $(t-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $V_{t-1}^{b_{t-1}}$  der Ordnung  $l_{t-1}$  und eine Zwickpunktige  $t-2$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $V_{t-2}^{j_{t-2}}$  von der Ordnung  $j_{t-2}$  in  $V_{t-1}^{b_{t-1}}$  besitzt. Aus einem allgemeinen Punkt vom  $S_{2k+1-t}$  kann man  $\infty^t$   $V_k^{(t)}$  in zwei verschiedenen Punkten treffende Geraden, die einen  $t+1$ -dimensionalen Kegel  $b_t$ -ter Ordnung bilden, konstruieren. Aus einem allgemeinen Punkte von  $S_{2k+1-t}$  kann man einen  $t$ -dimensionalen Kegel  $j_{t-1}$ -ter Ordnung mit den  $\infty^{t-1}$  Geraden, welche  $V_k^{(t)}$  berühren, konstruieren. In dieser Weise erhält man die charakteristischen Zahlen  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, j_0, j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$ . In dieser Note gibt der Verf. die allgemeinen Formeln für diese charakteristischen Zahlen. Bei der zum  $S_r$  gehörenden Mannigfaltigkeit  $V_k$ , wobei  $r > 2k+1$ , gibt es keine charakteristische Zahl, welche bei  $V_k$  im  $S_{2k+1}$  nicht existiert. T. Kubota (Sendai).

**Ehresmann, C.: Sur la topologie de certaines variétés algébriques.** C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 152—154 (1933).

Bestimmung der Homologiebasis, der Bettischen Zahlen und der Torsionskoeffizienten der Mannigfaltigkeit der Geraden eines reellen oder komplexen  $n$ -dimensionalen projektiven Raumes  $[n]$ . Im komplexen Fall besteht die Homologiebasis aus den von Schubert angegebenen Varietäten  $[p, q]$  ( $0 \leq p < q \leq n$ ), bestehend aus den Geraden, die in einem gegebenen Teilraum  $[q]$  von  $[n]$  liegen und einen gegebenen Teilraum  $[p]$  von  $[q]$  treffen.

van der Waerden (Leipzig).

**Huffman, J. F.: Bemerkung zur Berechnung der Geraden auf der allgemeinen Fläche dritten Grades.** Nieuw Arch. Wiskde **17**, 313—315 (1932).

**Servais, Cl.: Sur les biquadratiques gauches.** Mathesis **47**, 5—8 (1933).

**Burniat, Pol: Sur une transformation birationnelle associée à une surface du quatrième ordre ayant deux points doubles coniques.** Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **17**, H. 1, 1—17 (1932).

Let  $F$  be a quartic surface in  $S_3$  with 2 double points  $O_1$  and  $O_2$  and let  $x_1 = 0$  and  $x_2 = 0$  be two arbitrary planes on  $O_2$  and  $O_1$  respectively. A line  $p$  on  $O_i$  ( $i = 1, 2$ ) meets  $F$  in two points  $X$  and  $Y$  outside of  $O_i$  and meets the plane  $x_i = 0$  in a point  $P$ . As  $p$  varies, the involution in which  $(X, Y)$  and  $(O_i, P)$  are pairs of conjugate points defines in  $S_3$  an involutorial monoidal transformation  $T_i$  of order 4, leaving the quartic surfaces of a system  $\infty^9$ , among which  $F$ , invariant. The fundamental monoid of  $T_i$  is composed of the quadric osculating cone of  $F$  at  $O_i$  and of the plane  $x_i = 0$ . The base curve of the homaloidal system  $|F_i|$  of  $T_i$  is composed of the quartic curve  $\Gamma_i$  in which  $x_i = 0$  cuts  $F$  and of 8 lines  $d_{i\alpha}$  on  $O_i$ . The product  $T \equiv T_1 T_2$  is then considered and it is shown that  $T$  is of order 13 and that the surfaces of the homaloidal system of  $T$  have a 6-fold point at  $O_1$  and  $O_2$ , pass triply through the line  $O_1 O_2$ , the lines  $d_{2\alpha}$  and  $\Gamma_2$ , and pass simply through the 8 planar cubics which correspond by  $T_2$  to the lines  $d_{1\alpha}$ . It is also shown that  $T$  leaves invariant the quartic surfaces of a system  $\infty^3$ , for which  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  are base curves, the residual variable intersection of any two surfaces of the system being composed of two planar quartics.

O. Zariski (Baltimore).

**Paelinek, Louise:** Sur une transformation birationnelle involutive de l'espace. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 4, 1—18 (1932).

The author studies a transformation  $T$  in  $S_3$  in which to a point  $P$  corresponds the point  $P'$  common to the 3 polar planes of  $P$  with respect to two given quadrics  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  and a given nul system. This involutorial transformation is a particular case of the Cremona transformation in which to the planes correspond cubic surfaces  $F$  on a space sextic  $K$  of genus 3. The curve  $\Gamma$ , intersection of  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  and locus of self corresponding points of  $T$ , and  $K$  meet in 8 points and have in common infinite bisecants, which rule out a surface of order 8, passing doubly through  $K$  and triply through  $\Gamma$ . The common bisecants issuing from a point  $A$  of  $K$  are the lines  $g$  and  $h$  of the quadric  $\Phi$  of the pencil determined by  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$ , passing through  $A$ . The two lines  $g'$  and  $h'$  of  $\Phi$  passing through the second intersection of  $h$  and  $g$  respectively with  $K$  meet in a point  $A'$  of  $K$ . The correspondence between  $A$  and  $A'$  is an involution on  $K$  and has 4 double points at the vertices of the cones of the pencil  $|\Phi|$ . There exist two distinct systems of quartic surfaces which pass through  $K$  and are invariant under  $T$ . The surfaces of one system are  $\infty^1$  and are the loci of the pairs of points of the given involution which are conjugate with respect to a third fixed quadric. The surfaces of the second system are  $\infty^4$  and are the loci of pairs of points of the given involution which are conjugate in a second fixed nul system. It is shown: that a surface  $\Psi$  of this second system is generated by the intersection of a plane with its corresponding  $F$  under  $T$ , as the plane varies in a pencil; that  $K$  and  $\Gamma$  are base curves of this system; and that the residual intersection of two surfaces  $\Psi$  is a sextic curve, which lies on a quadric and which meets  $\Gamma$  in 8 points and  $K$  in 12 points.

*O. Zariski* (Baltimore).

**Edge, W. L.:** Octadic surfaces and plane quartic curves. Proc. London Math. Soc., II. s. 34, 492—525 (1932).

Dans ce travail, l'auteur développe des résultats classiques de Hesse: soit  $\mathfrak{N}$  un réseau de quadriques  $Q = xQ_1 + yQ_2 + zQ_3 = 0$ , représentées par les points  $(x, y, z)$  d'un plan  $\sigma$ . Les cônes de ce réseau sont représentés par les points d'une quartique plane  $\delta$  sans point double, et leurs sommets ont pour lieu, dans l'espace, une sextique gauche  $\vartheta$  (de genre 3) qui est en correspondance (1,1) avec  $\delta$ . A une conique  $\gamma$  du plan  $\sigma$  correspond une famille de quadriques  $Q$  dépendant d'un paramètre au second degré, dont l'enveloppe  $\Gamma$  est une surface du quatrième degré ayant un point double en chacun des 8 points-bases du réseau  $\mathfrak{N}$ : cette surface est appelée surface octadique. Si la conique  $\gamma$  est tangente à  $\delta$  en un point,  $\Gamma$  admet un point double supplémentaire au point correspondant de  $\vartheta$ . Une conique pouvant être tangente à  $\delta$  en quatre points, une surface octadique peut présenter quatre points doubles supplémentaire en des points de  $\vartheta$ : l'auteur étudie en détail ces surfaces et montre qu'elles se répartissent en systèmes de deux natures différentes, suivant la disposition de leurs douze points doubles. Signalons encore les propriétés suivantes: à chacune des  $\infty^1$  trisécantes de  $\vartheta$  correspond une surface octadique ayant un point double en chacun des points de  $\vartheta$  situés sur la trisécante. L'étude des trisécantes de  $\vartheta$  qui sont en même temps génératrices des quadriques du réseau  $\mathfrak{N}$  conduit à la détermination des triangles à la fois inscrits et circonscrits à  $\delta$ : il y a 288 tels triangles, nombre déjà obtenu par Cayley par des méthodes plus compliquées.

*P. Dubreil* (Lille).

**Horsfall, I. O.:** Transformations associated with the lines of a cubic, quadric, or linear complex. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 872—878 (1932).

Au moyen d'une définition appropriée du complexe cubique, l'auteur représente par un point chaque droite d'un tel complexe. Il étudie ainsi d'une manière simple l'„intersection“ du complexe avec un ou deux complexes linéaires, puis applique la méthode au complexe des droites joignant deux points se correspondant dans une involution cubique générale. Le travail se termine par l'étude analogue des complexes du second degré, des transformations de Cremona qui leur sont attachées, etc.

*P. Dubreil* (Lille).



## Differentialgeometrie:

**Chamard, Lucien:** Sur certains points singuliers des ensembles isodistants d'un ensemble ponctuel. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 930—932 (1932).

In Anschluß an die Arbeit von G. Durand: Sur une généralisation des surfaces convexes [J. Math. pures appl., IX. s. 10 (1931); dies. Zbl. 3, 222—223] werden einige Eigenschaften der Kontingens und der Paratingens in Punkten der Klasse ( $\beta$ ) angegeben. Feller (Kiel).

**Mayer, Anton E.:** Über Gleichdicke. Z. Ver. Deutsch. Ing. 1933, 152.

Bemerkung zur Arbeit gleichen Titels (dies. Zbl. 5, 113). Es wird Maximum und Minimum des isoperimetrischen Defizits einer Kurve gegebener konstanter Breite bei gegebener Dicke des schmalsten die Kurve enthaltenden Kreisrings angegeben. Beweise sollen an anderer Stelle veröffentlicht werden. W. Fenchel (Göttingen).

**Lalan:** Sur les transformations asymptotiques des courbes minima. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1211—1213 (1932).

Ist  $\mathfrak{x}(u)$  der Ortsvektor einer Minimalkurve, so läßt sich ein neuer als Pseudobogenlänge bezeichneter Parameter  $\sigma$  von invarianter Bedeutung durch die Quadratur

$$d\sigma^2 = i \frac{|\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''}{|\mathfrak{x}''|^2} du^2 \quad \left( \frac{d\mathfrak{y}}{du} = \mathfrak{y}' \text{ gesetzt} \right)$$

einführen. An Stelle der Frenetschen Formeln tritt dann das Formelsystem

$$\frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma} = \xi_1, \quad \frac{d\xi_1}{d\sigma} = \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{d\sigma} = k\xi_1 - \xi_3, \quad \frac{d\xi_3}{d\sigma} = -k\xi_2.$$

Dabei ist

$$\xi_1^2 = 0, \quad \xi_3^2 = 0, \quad \xi_1 \xi_3 = 1, \quad \xi_2^2 = 1, \quad \xi_1 \xi_2 = \xi_2 \xi_3 = 0, \quad (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = i.$$

Für die „Pseudokrümmung“  $k$  gilt

$$k = -\frac{1}{2} \left| \frac{d^3 \mathfrak{x}}{d\sigma^3} \right|^2.$$

Die „asymptotische Transformation“ von  $\mathfrak{x}$  in eine andere Minimalkurve  $\mathfrak{x}_1$  wird nun einfach durch die Formel geliefert

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + l(u\xi_1 + \xi_2),$$

wobei  $l$  eine Konstante ist und wobei  $u$  der Riccatischen Gleichung

$$\frac{du}{d\sigma} - \frac{u^2}{2} + k + \frac{1}{l} = 0$$

genügt. Man verifiziert, daß diese Transformation pseudolängentreu ist. Für die Pseudokrümmung  $k_1$  von  $\mathfrak{x}_1$  gilt:  $k_1 + k = u^2 - \frac{2}{l}$ . Es werden noch einige geometrische Lagebeziehungen zwischen  $\mathfrak{x}$  und  $\mathfrak{x}_1$  mitgeteilt. Cohn-Vossen (Köln).

**Lalan, V.:** La signification affine du pseudo-arc et de la pseudo-courbure des courbes minima. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 232—233 (1933).

Die Definitionen „Pseudolänge“ und „Pseudokrümmung“ sind in der vorstehend referierten Arbeit gegeben. Nun wird gezeigt: 1. Die Pseudolänge ist bis auf einen konstanten Faktor gleich der Affinlänge der Minimalkurve. 2. Die Pseudokrümmung ist bis auf einen konstanten Faktor gleich der ersten Affinkrümmung. 3. Die Minimalcurven von konstanter Pseudokrümmung sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Tangenten einem linearen Gradenkomplex angehören. Cohn-Vossen (Köln).

**Pinl, M.:** Quasimetrik auf totalisotropen Flächen. I. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 35, 1181—1188 (1932).

Im euklidischen  $R_n$  gibt es für  $n \geq 5$  solche 2-dimensionale Flächen, auf denen alle Koeffizienten der quadratischen metrischen Fundamentalform identisch verschwinden. Diese Flächen werden ametrisch oder totalisotrop genannt. Sei  $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$  der Ortsvektor einer solchen Fläche  $F$ , und sei Differentiation durch Indizes bezeichnet ( $\mathfrak{x}_1$  für  $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_1}$  usw.). Dann sind die Gleichungen  $\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k = 0$ , ( $i, k = 1, 2$ ) damit gleich-

bedeutend, daß  $F$  ametrisk ist. Aus diesen Gleichungen folgt aber leicht, daß die Zahlen  $g_{iklm} = \xi_{ik} \xi_{lm}$  ( $i, k, l, m = 1, 2$ ) einen bez. Transformationen  $(u_1, u_2) \rightarrow (v_1, v_2)$  4fach kovarianten, in allen Indizes symmetrischen Tensor bilden. Hiernach liegt es nahe, auf  $F$  ein Pseudolängendifferential  $dp = \sqrt[4]{g_{iklm} du_i du_k du_l du_m}$  einzuführen. Die 4 Nullrichtungen der biquadratischen Form  $dp^4$  zeigen nun verschiedene Eigentümlichkeiten, wenn einige Komitanten der Form identisch verschwinden. So ergibt sich, daß im  $R_5$  die 4 Richtungen in jedem Punkt in eine einzige zusammenfallen. Einige andere Fälle werden im  $R_6$  realisiert. Von  $n = 9$  an kommen im  $R_n$  alle invariantentheoretisch möglichen Fälle wirklich vor. Verf. beabsichtigt, die Finsler-Berwaldsche Krümmungstheorie auf die Form  $dp^4$  anzuwenden. *Cohn-Vossen* (Köln).

**Vincensini, Paul: Points focaux des cercles d'une congruence.** C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1359—1361 (1932).

Chaque cercle d'une congruence a six foyers dont deux coïncident avec les points cycliques; deux autres sont rejetés à l'infini si les axes des cercles forment une congruence isotrope (B. Gambier, ce Zbl. **5**, 408). L'auteur complète ce resultat: à chaque congruence isotrope correspondent  $\infty$  congruences de cercles dont tous les six points focaux sont absorbés par le cercle à l'infini.

*Finikoff* (Moscou).

**Finikoff, S.: Couples de surfaces dont les lignes de courbure se correspondent, les tangentes correspondantes se coupant.** C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 28—29 (1933).

Die im Titel angegebenen Verwandtschaften werden im Zusammenhange mit den zyklischen Systemen Ribaucours untersucht.

*Čech* (Brno).

**Finikoff, Serge: Transformation  $T$  des congruences de droites.** Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **2**, 59—88 (1933).

Die  $T$ -Transformation zweier Kongruenzen  $C_1$  und  $C_2$  wird durch zwei Hilfskongruenzen  $A_1$  und  $A_2$  definiert, deren Geraden die homologen Brennpunkte von  $C_1$  und  $C_2$  verbinden und in diesen Brennpunkten die entsprechenden Fokalflächen berühren. Die  $T$ -Transformationen können im gewissen Sinne als eine Übertragung der Bianchischen  $W$ -Transformationen in den Geradenraum aufgefaßt werden. Falls  $C$  einem linearen Komplex angehört, ist die  $T$ -Transformation dann und nur dann möglich, wenn auch  $C_1$  demselben Komplex angehört. Von dieser Ausnahme abgesehen, hängen die  $T$ -Transformationen einer Kongruenz  $C$  von zwei willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen ab. Die  $T$ -transformierte  $C_1$  einer  $W$ -Kongruenz  $C$  ist wieder eine  $W$ -Kongruenz; falls  $C$  keinem lin. Komplex angehört, sind auch die Hilfskongruenzen  $A_1$  und  $A_2$   $W$ -Kongruenzen; es entsteht so die Konfiguration des Bianchischen Permutabilitätstheorems. Sind zwei  $T$ -transformierte  $C_1$  und  $C_2$  einer  $W$ -Kongruenz gegeben, so gibt es ein einfach unendliches System von  $W$ -Kongruenzen  $C'$ , die gleichzeitig  $T$ -transformierte von  $C_1$  und  $C_2$  sind; die homologen Brennpunkte der Kongruenzen  $C'$  bilden in jedem Augenblick zwei Gerade  $p'$  und  $p''$ ; die homologen Geraden der Kongruenzen  $C'$  erzeugen eine sich auf  $p'$  und  $p''$  stützende Regelschar. Die so entstehende Figur kommt im wesentlichen bei Bianchi 1908 in Betracht (Sulle configurazioni mobili di Möbius. Rend. Circ. mat. Palermo **25**, 306). Die Jonassche Transformation der  $R$ -Kongruenzen ist ein spezieller Fall der  $T$ -Transformationen. Raumangel verbietet, auf weitere bemerkenswerte Einzelheiten der Abhandlung einzugehen. Es sei noch bemerkt, daß die Hauptergebnisse der Arbeit in fünf vorläufigen Mitteilungen des Verf. vorliegen: C. R. Acad. Sci., Paris **188**, 1647 (1929); **189**, 517 (1929); **190**, 999 (1930); **191**, 642 (1930) und Atti Accad. naz. Lincei, Rend., s. VI. **14**, 421 (1931); vgl. dies. Zbl. **3**, 321.

*Čech* (Brno).

**Godeaux, Lucien: Sur la surface enveloppée par les quadriques de Lie d'une surface.** An. Fac. Ci. Porto **17**, 5—13 (1931).

Dans des travaux antérieurs (Bull. Acad. roy. Belgique **1929**, 37—53 et 702—710) l'auteur a étudié l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface et déterminé à quelle condition il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de cette enveloppe. Il apporte ici à ses résultats différents compléments concernant notamment



les congruences engendrées par les arêtes du tétraèdre de Demoulin appartenant à la quadrique de Lie, les complexes linéaires osculateurs à ces congruences, etc. . . .

Dubreil (Paris).

**Dop, A. van: Transformation eines Netzes mit gleichen Invarianten in zwei andere, ebenfalls mit gleichen Invarianten.** Nieuw Arch. Wiskde 17, 316—321 (1932) [Holländisch].

Es handelt sich um eine Aufgabe aus der projektiven Differentialgeometrie der Netze (vgl. G. Tzitzeica, Géométrie différentielle projective des réseaux). Der Verf. betrachtet ein Netz  $N$  auf einer  $Q_{n-2}$  in einem  $E_{n-1}$  und eine mit  $N$  harmonische Strahlenkongruenz  $C$ . Er stellt sich die Frage, ob die Schnittpunkte der Kongruenzstrahlen mit  $Q$  zwei Netzen  $N_1$  und  $N_2$  erzeugen können, welche der Kongruenz zugeordnet sind. Es zeigt sich, daß dieser Fall immer eintritt, wenn  $N$  gleiche Invarianten hat und  $C$  in einer bestimmten Weise gewählt wird.  $N_1$  und  $N_2$  haben dann auch gleiche Invarianten.

O. Bottema (Groningen).

**Bottema, O.: Die kubischen Raumkurven in der affinen Differentialgeometrie.** Nieuw Arch. Wiskde 17, 297—312 (1932) [Holländisch].

**Raschewsky, P.: Eine charakteristische Eigenschaft der Schar der geodätischen Linien des zweidimensionalen affin-zusammenhängenden Raumes.** Rec. math. Soc. math. Moscou 39, Nr 1/2, 72—79 u. dtsh. Zusammenfassung 80 (1932) [Russisch].

Une famille de courbes  $C$  est déterminée dans le continuum  $(x^1, x^2)$  par l'équation  $\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 - \tilde{x}^2 \tilde{x}^1 = f(x^1, x^2, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2)$ ,  $f$  étant une fonction homogène et du troisième ordre par rapport aux arguments  $\tilde{x}^1, \tilde{x}^2$ . La famille  $(C)$  est congruente du  $n^{\text{me}}$  ordre à la famille de droites  $a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 = 0$  ( $a_i = \text{const}$ ) au point  $M_0(x_0^1, x_0^2)$  si, les variables  $x^1, x^2$  convenablement choisies, à chaque ligne  $C$  correspond une droite  $C_2$  qui passe par le point  $M_0$  et qui se confond dans son voisinage avec  $C$  aux infiniments petits du  $n^{\text{me}}$  ordre près; c.-à.-d. à chaque point  $M(x^1, x^2)$  de  $C$  correspond un point  $M_2(x_2^1, x_2^2)$  de  $C_2$  de sorte que  $|x^i - x_2^i| < A\varepsilon^{n+1}$  si  $|x^i - x_0^i| < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $\varepsilon$  étant un nombre positif suffisamment petit et  $A$  une constante indépendante de  $\varepsilon$ . Cela posé, l'auteur démontre que la famille de géodésiques de l'espace à connexion affine est congruente du 3<sup>me</sup> ordre aux droites et, inversement, une famille de lignes  $C$  dans le continuum  $(x^1, x^2)$  donnée, on peut y choisir une connexion affine qui les rend géodésiques si elles sont congruentes aux droites au moins du seconde ordre.

S. Finikoff (Moscou).

**Burstin, C.: Ein Beitrag zum Problem der Einbettung der Riemannschen Räume in euklidischen Räumen.** Rec. math. Soc. math. Moscou 38, Nr 3/4, 74—85 (1931).

Verf. legt die Arbeit von Janet zugrunde: Sur la possibilité de plonger un espace etc. Ann. Soc. Polon. math. 5 (1926). Dort wird bei der Integration der Einbettungsgleichungen benutzt aber nicht ausführlich nachgewiesen, daß eine gewisse Matrix keinen erniedrigten Rang hat. Verf. füllt diese Lücke aus, indem er der Frage eine einfache geometrische Deutung gibt. Er zeigt ferner, daß die Einbettung bei reell definit vorgegebenem Linienelement stets reell möglich ist. Schließlich ergibt eine einfache Verallgemeinerung des Janetschen Ansatzes, daß man nicht nur in den euklidischen, sondern auch in jeden Riemannschen  $n$ -dimensionalen Raum  $R_n$  einen gegebenen  $R_k$  stets einbetten kann, wenn  $n \geq \binom{k+1}{2}$ .

Cohn-Vossen (Köln).

**Burstin, C.: Beiträge der Verbiegung von Hyperflächen in euklidischen Räumen.** Rec. math. Soc. math. Moscou 38, Nr 3/4, 86—93 (1931).

Es werden auf Hyperflächen in höherdimensionalen euklidischen Räumen die folgenden Darbouxschen Sätze der Biegungstheorie verallgemeinert: 1. Eine Fläche ist unverbiegbar, wenn man eine auf ihr verlaufende Kurve, die nicht Asymptotenlinie ist, festhält. 2. Man kann eine Fläche (im kleinen) stetig so verbiegen, daß eine auf der Ausgangsfläche verlaufende Kurve, die nicht Asymptotenlinie ist, eine vorgegebene Deformation erleidet, wobei nur gewisse Ungleichungen gewahrt bleiben müssen, die

ausschließen, daß die Kurve auf einer der Biegungsflächen Asymptotenlinie wird, und daß die Lösung des Einbettungsproblems imaginär ausfällt. Bei Verallgemeinerung der Sätze von einer Fläche  $F_2$  auf eine  $F_k$  tritt an Stelle der Kurve eine in  $F_k$  gelegene  $F_{k-1}$ .  
Cohn-Vossen (Köln).

**Walker, A. G.:** On small deformation of sub-spaces of a flat space. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 3, 77—86 (1932).

The author studies the infinitesimal deformations of a Riemannian manifold  $V_n$  immersed in a Euclidean space of  $p > n$  dimensions. He finds the equations for the change in the Riemann Christoffel tensor and the condition that vectors parallel along a congruence remain parallel. The conditions for inextensible, normal and tangent deformation follow. Reference is made to the papers of Eisenhart, Levy and McConnell on this subject, but not to the paper by J. A. Schouten, [Proc. Amsterdam Akad. 31, 208 (1927)], which contains a more elaborate theory and refers to other sources.

D. J. Struik (Cambridge).

**Hlavatý, V.:** Courbes dans des espaces généralisés. Ann. Soc. Polon. math. 10, 45—75 (1932).

This paper is a report of three lectures, given in Cracow during May, 1931. It gives a discussion of the work done on curves in manifolds  $X_n$  of  $n$  dimensions, in which a linear displacement is given; work done to a considerable extent by the author himself. In the first lecture the  $X_n$  is taken as Riemannian and as a Weyl manifold, and the formulas of Frenet for such manifolds are discussed. In the second lecture the manifold is taken as Riemannian,  $V_n$ , and curves are studied on  $V_m$  in  $V_n$  ( $m < n$ ). This leads to quasiasymptotic curves and the generalized theorem of Beltrami-Enneper on the torsion of asymptotic lines. The third lecture deals with the integration of the system defining parallel displacement along a line of length zero in a Weyl manifold, and secondly with infinitesimal deformation of curves in a metrical manifold with torsion.

Struik (Cambridge).

**Hosokawa, Tōyomon:** Connections in the manifold admitting generalized transformations. Proc. Imp. Acad. Jap. 8, 348—351 (1932).

This paper considers a general manifold, constructed by associating with each point of an  $n$ -dimensional space  $X_n$  a system of  $K$ -vectors ( $K$ -Beine),  $h$  in number. A linear connection is defined, from which a curvature tensor is derived in the usual way: by comparing covariant derivatives of a vector taken in opposite orders, and identities analogous to those of Bianchi are set up for the covariant derivative of this curvature tensor.

Douglas (Cambridge, Mass., U.S.A.).

**Golab, St.:** Sur la représentation conforme de l'espace de Finsler sur l'espace euclidien. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 25—27 (1933).

In this note the author proves that if a Finsler space  $F_n$  with the metric  $F(x, dx)$  is conformal to a euclidean space  $R_n$  whose metric is  $g_{ij} dx^i dx^j$ , then  $F_n$  is necessarily Riemannian. He takes advantage of the fact that it is sufficient to prove the theorem for  $n = 2$  and makes the proof by means of Landsberg's angular metric. Knebelman.

**Cartan, Élie:** Observations sur la communication précédente. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 27—28 (1933).

Cartan formulates Golab's problem in a less restricted manner. He finds the condition in order that the directions at every point of a Finsler space be conformal to the directions at a fixed point of a euclidean space. For  $n > 2$  the space must be Riemannian.

Knebelman (Princeton).

**Lochs, Gustav:** Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XLII. Die Jordankurve im Kurvennetz. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, 134—146 (1932).

Verf. betrachtet im Kurvennetz eine Jordankurve, die jede Netzkurve in höchstens zwei Punkten schneidet. Von diesem Gebilde werden topologische Invarianten aufgestellt. Jede Netzschar bestimmt auf der Kurve eine Involution, führt man beide Involutionen nacheinander aus, so entsteht eine gleichrichtende Transformation  $t$  der



Kurve. Diese wird nach J. Nielsen klassifiziert. Es zeigt sich, daß bei gegebener Transformation immer die Angabe zweier nicht ineinander transformierbaren Fixpunkte der Involution genügt, um das Gebilde zu charakterisieren. Durch Beispiele wird gezeigt: a) Nicht zu jeder Transformation gehört ein Netz. b) Es gibt Transformationen, die auf unendlich viele verschiedene Weisen von einem Netze erzeugt werden können. Wenn  $t^n$  wenigstens einen aber endlich viele Fixpunkte hat, gibt es nur endlich viele Netze. G. Bol (Princeton).

**Blaschke, Wilhelm: Results and problems about  $n$ -webs of curves in a plane.** Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 828—830 (1932).

**Bol, G.: On  $n$ -webs of curves in a plane.** Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 855—857 (1932).

### Topologie:

**Krahn, E.: Die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Vierfarbensatzes.** Acta et Comment. Univ. Tartu A **22**, Nr 2, 1—7 (1932).

Von  $k$  Kugeln werden  $r$  mit einem roten und unabhängig davon  $g$  mit einem grünen Fleck versehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Kugel nicht doppelt gefärbt ist, ist  $\leq \left(1 - \frac{r}{k}\right)^g = A$ . Diese Betrachtung findet Anwendung auf den Vierfarbensatz durch folgende Konstruktion: Zugrunde liegt wie üblich ein Dreiecksnetz  $D$  auf der Kugel, dessen Punkte (und zwar verbundene mit verschiedener Farbe) zu färben sind. Man nimmt einen Baum  $B$ . Seine Kanten werden, ausgenommen an den Punkten der Verzweigung 0, aufgespalten, so daß  $B$  zu einem einfachen Zykel  $Z$  wird, den man zum Großkreis  $Z$  deformieren kann. Indem man Punkte von  $Z$ , die in  $B$  derselbe Punkt waren, verbindet, erhält man ein neues Dreiecksnetz  $C$ , das die eine Halbkugel füllt, während  $D$  auf der anderen liegt. Die Anzahl Möglichkeiten,  $C$  und  $D$  zu färben, sind kombinatorisch leicht anzugebende Zahlen  $r$  und  $g$ . Der Vierfarbensatz besteht in der Vermutung, daß es stets zusammengehörige Färbungen von  $C$  und  $D$  gibt, d. h. Färbungen mit Anschluß über  $Z$  hin. Da man über etwaige Abhängigkeit einer  $C$ - von einer  $D$ -Färbung nichts weiß, werden sie als voneinander unabhängig gerechnet. Dann ist  $A$  eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, daß der Vierfarbensatz falsch ist.  $k$  bedeutet dabei die Gesamtzahl möglicher Färbungen von  $Z$ . Da  $A$  mit wachsender Punktezahl von  $Z$  stark gegen 0 geht, wäre man hiernach der Gültigkeit des Vierfarbensatzes um so sicherer, je mehr Länder zu färben sind. Heesch (Göttingen).

**Miller, E. W.: Solution of the Zarankiewicz problem.** Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 831—834 (1932).

Beispiel einer Baumkurve, die mit keiner echten Untermenge von sich selbst homöomorph ist. (Negative Lösung der von Zarankiewicz gestellten Frage.) Das Beispiel wird auf Grund folgenden Satzes konstruiert: Enthält eine Baumkurve  $S$  eine Untermenge  $K$  derart, daß 1. jeder Punkt dieser Untermenge ein Fixpunkt bei jeder topologischen Transformation (Abbildung) von  $S$  auf eine Untermenge von  $S$  ist, und 2. jeder von Endpunkten verschiedene Punkt von  $S$  auf einem einfachen Bogen mit Endpunkten auf  $K$  liegt, so ist  $S$  mit seiner echten Untermenge von sich selbst homöomorph. Julia Rózańska (Moskau).

**Favard, J.: Sur la structure topologique des continus rectifiables.** C. R. Acad. Sci., Paris **195**, 1218—1219 (1932).

Ein Kontinuum  $K$  von endlicher Länge (= kleinster Limes einer gegen  $K$  konvergenten Folge von Polygonen) ist im kleinen zusammenhängend und Summe von endlich oder abzählbar vielen Bogen, die paarweise höchstens zwei Punkte gemein haben. Nöbeling (Wien).

**Zippin, Leo: Independent arcs of a continuous curve.** Ann. of Math., II. s. **34**, 95—113 (1933).

Für den  $n$ -Beinsatz, bzw.  $n$ -Bogensatz, und deren Verallgemeinerungen liegen bis jetzt nur lange und eher komplizierte Beweise vor. In dieser Hinsicht bietet der Beweis

des Verf. gegenüber z. B. dem Nöbelingschen (s. Zbl. 4, 162) keinen wesentlichen Fortschritt (vgl. dessen Ankündigung in Bull. Amer. Math. Soc. 38, 343). Dagegen erzielt Verf. durch Ausdehnung des Begriffes der lokal zusammenhängenden kompakten Räume auf lokal kompakte, sowie durch eine kombinatorische Betrachtung der gewöhnlichen Kurven (im Sinne von Menger), die Möglichkeit einer induktiven Beweisführung des so erweiterten  $n$ -Bogensatzes, allerdings unter Ausschließung des Falles von  $\geq$  wachsender Ordnung. Zum Schluß folgt das Nöbelingsche Gerüsttheorem und einige interessante Betrachtungen, die daran anknüpfen. *B. Knaster* (Warszawa).

**Wilson, W. A.:** On unicoherency about a simple closed curve. Amer. J. Math. 55, 135—145 (1933).

In Verallgemeinerung des bekannten Begriffes der Unikohärenz (Kuratowski, Henkellosigkeit nach Vietoris), nennt Verf. einen metrischen Raum  $Z$  unikohärent bezüglich der einfachen geschlossenen Kurve  $J \subset Z$ , wenn für jede Zerlegung von  $J$  in 2 offene Bogen  $\lambda, \mu$  durch 2 Punkte  $a, b$  und für jede Zerlegung von  $Z$  in 2 abgeschlossene Mengen  $H, K$  mit  $\lambda \cdot K = \mu \cdot H = 0$  eine Komponente von  $H \cdot K$  existiert, die  $a$  und  $b$  enthält. Verf. beweist eine Reihe von Sätzen über diesen Begriff. Ist  $Z$  kompakt und bezüglich  $J$  nicht unikohärent, dann ist  $Z$  für je 2 Punkte  $a, b$  von  $J$ , die  $J$  in die offenen Bogen  $\lambda, \mu$  zerlegen, Summe von 2 abgeschlossenen Mengen  $H, K$  mit  $\lambda \cdot K = \mu \cdot H = 0$ , so daß seine Komponente von  $H \cdot K$  beide Punkte  $a, b$  enthält. Damit der kompakte Raum  $Z$  bezüglich  $J$  nicht unikohärent sei, ist notwendig und hinreichend, daß eine eindeutige, stetige Abbildung  $f$  von  $Z$  existiert, so daß  $f(Z) = J$  und  $f(p) = p$  für jeden Punkt  $p$  aus  $J$  ist. Ist  $Z$  unikohärent bezüglich  $J$ ,  $Z' = f(Z)$  eindeutiges, stetiges Bild von  $Z$  und  $J' = f(J)$  topologisches Bild von  $J$ , so ist  $Z'$  unikohärent bezüglich  $J'$ . Ist jede der kompakten Mengen  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) unikohärent bezüglich  $J$  und  $M_{i+1} \subset M_i$ , so ist auch  $\cap M_i$  unikohärent bezüglich  $J$ . Eine kompakte Menge  $M$ , die unikohärent ist bezüglich  $J$ , enthält eine Menge  $M'$ , die irreduzibel ist bezüglich der Abgeschlossenheit und der Unikohärenz bezüglich  $J$ . Diese Menge  $M'$  enthält keinen Zerschneidungspunkt (cut point). Damit ein lokal zusammenhängendes Kontinuum  $Z$  unikohärent sei (d. h. nicht Summe sei zweier Teilkontinua mit nicht zusammenhängendem Durchschnitt), ist notwendig und hinreichend, daß  $Z$  unikohärent sei bezüglich jeder einfachen geschlossenen Kurve  $J \subset Z$ . *Nöbeling* (Wien).

**Roberts, J. H.:** A property related to completeness. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 835—838 (1932).

Verf. beweist: Ein metrisierbarer Raum  $R$  ist bei geeigneter Metrik vollständig, wenn er folgendem Axiom von R. L. Moore (Bull. Amer. Math. Soc. 33, 141) genügt: In  $R$  läßt sich eine Folge  $\{G_n\}$  von Systemen offener Mengen mit der Summe  $R$  so finden, daß 1. zu je 2 Punkten  $p$  und  $q$  jeder offenen Menge  $M$  ein  $n_0$  existiert, daß für jedes  $n > n_0$  jede  $p$  enthaltende Menge aus  $G_n$  samt Begrenzung Teil von  $M - q$  ist, und so daß 2. für jede Folge  $\{R_n\}$  von Mengen  $R_n \in G_n$ , für welche jeder Durchschnitt  $R_1 \dots R_n$  nichtleer ist, auch der Durchschnitt  $\prod_{n=1}^{\infty} \bar{R}_n$  nichtleer ist. *Nöbeling* (Wien).

**Whitney, Hassler:** A characterization of the closed 2-cell. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 261—273 (1933).

Verf. zeigt, daß die abgeschlossene zweidimensionale Zelle  $Z$  (= homöomorphes Bild der abgeschlossenen Kreisscheibe) durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist:  $Z$  ist ein eindeutiges, stetiges Streckenbild und enthält eine einfache geschlossene Kurve  $J$ , so daß 1.  $J$  irreduzibel homolog Null in  $Z$  ist und 2., wenn  $B$  ein Bogen  $\subset Z$  mit den Endpunkten (und nur diesen) auf  $J$  ist, die Menge  $Z - B$  nicht zusammenhängend ist. *Nöbeling* (Wien).

**Seifert, H.:** Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume. Acta math. 60, 147—238 (1933).

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit  $F$  heißt gefasert, wenn in ihr ein System von geschlossenen Jordan-Kurven, den Fasern, derart gegeben ist, daß durch jeden



Punkt von  $F$  genau eine Faser geht. Dabei soll die Umgebung einer Faser sich fasertreu und topologisch auf einen „gefaseren Vollring“ abbilden lassen, der aus einem Kreiszylinder mit achsenparallelen Fasern durch Identifizierung der um  $\frac{\nu}{\mu} 2\pi$  verschraubten Bodenfläche mit der Dachfläche entsteht. Für  $\nu \equiv 0 \pmod{\mu}$  enthält der Vollring eine Ausnahmefaser, welche, wenn die Nachbarfasern in sie deformiert werden, mehrfach durchlaufen erscheint. Das Ziel der Arbeit ist nun die restlose Klassifikation der kompakten gefaserten Räume und ihre Charakterisierung durch numerische Invarianten. — Die Zerlegungsfläche  $f$  ist dadurch definiert, daß jeder Faser von  $F$  ein Punkt von  $f$  entspricht. Mit Hilfe der nach Radó [Acta Litt. Sci. Szeged 2, 101 (1925)] immer möglichen Triangulierung von  $f$  wird die Triangulierbarkeit aller gefaserten Räume bewiesen. Die Zerlegungsfläche ist dadurch bewertet, daß jedem geschlossenen Weg auf  $f$  eine Zahl  $\pm 1$  zugeordnet ist, die angibt, ob die Orientierung der Faser sich auf diesem Wege umkehrt, und die nur von der Homologiekategorie des Weges abhängt. Es gibt bei orientierbaren geschlossenen Flächen zwei wesentlich verschiedene Bewertungen  $O_o$  und  $N_o$ , bei nichtorientierbaren vier:  $O_n$ ,  $N_n I$ ,  $N_n II$ ,  $N_n III$ . Jedes von diesen Symbolen charakterisiert zusammen mit dem Geschlecht eine bewertete Fläche  $f$ . — Gesetzt nun, es gebe eine Ausnahmefaser,  $V$  sei ihre Vollringumgebung. Auf der Oberfläche von  $V$  sei  $H$  eine Faser,  $Q$  ein konj. Rückkehrschnitt zu  $H$ ,  $M$  der Meridiankreis (Bodenkreis des Zylinders, aus dem  $V$  entstanden). Dann gilt eine Homologie  $M \sim \alpha Q + \beta H$  mit  $(\alpha, \beta) = 1$  und (bei passender Wahl von  $Q$ )  $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta < \alpha$ . Ersetzt man nun  $V$  durch einen unverschraubten Vollring mit  $H$  als Faser und  $Q$  als Meridiankreis, so entsteht aus  $F$  ein gefasertes Raum mit einer Ausnahmefaser weniger. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man einen Raum  $F'$  ohne Ausnahmefasern. Bohrt man aus  $F'$  noch einen beliebigen gefaserten Vollring aus, so entsteht ein Raum  $F_0$ , der nur von der bewerteten Zerlegungsfläche abhängt und aus dem topologischen Produkt der kanonisch zerschnittenen Fläche  $f$  mit einem Kreis nach einer festen Heftungsvorschrift hergestellt werden kann. Die Art der Schließung von  $F_0$  zu  $F'$  hängt noch von einer Konstanten  $b$  ab. Diese bildet, zusammen mit dem Symbol der bewerteten Zerlegungsfläche und den Zahlenpaaren  $(\alpha_i, \beta_i)$  der endlich vielen Ausnahmefasern ein volles Invariantensystem von  $F$  gegenüber fasertreuen topologischen Abbildungen. Die Wegegruppe von  $F$  wird in diesen Invarianten ausgedrückt. Die Invarianten bilden häufig ein brauchbares Mittel, die Homöomorphie zweier Räume dadurch zu erweisen, daß man sie beide fasert. Beispiele dafür und Beispiele unfaserbarer Räume beschließen die Arbeit.

van der Waerden (Leipzig).

## Relativitätstheorie.

Strömberg, Gustaf: Space structure and motion. Science 1932 II, 477—481 u. 504—508 (1932).

Campbell, J. W.: The clock problem in relativity. Philos. Mag., VII. s. 15, 48—51 (1933).

Kennedy, Roy J., and Edward M. Thorndike: Experimental establishment of the relativity of time. Physic. Rev., II. s. 42, 400—418 (1932).

Verff. stellten sich die Aufgabe, ein Experiment durchzuführen, das direkt die Einsteinsche Zeittransformation nach sich ziehen soll, im Gegensatz zu den Versuchen von der Art des Michelsonschen Experiments, zu dessen Erklärung eine Kontraktion der Längen ausreichen würde und die Zeit nicht unmittelbar hineinspielt. Ein Lichtstrahl wurde in zwei Teile gespalten, die nach Durchlaufen verschiedener Wege zur Interferenz gebracht werden. Die Phasenverschiedenheit würde, ohne die Zeittransformation, von der Geschwindigkeit der bewegten Erde abhängen und infolge der täglichen und jährlichen Rotation zu periodischen Veränderungen Veranlassung geben. Die Kleinheit des Effektes machte eine ungewöhnliche Sorgfalt der experimentellen

Durchführung notwendig. Der Nulleffekt wurde nachgewiesen bis auf eine Geschwindigkeit des Sonnensystems, die nicht die Hälfte der Erdbahngeschwindigkeit übertreffen kann.

*Lanczos (Lafayette).*

**Kimino, M.:** Sulla correzione einsteiniana del tempo in un moto planetario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 16, 223—227 (1932).

Again making use of the principle of equivalence given by Levi-Civita for the consideration, to a second approximation, of the motion of a particle of small mass in the gravitational field of a spherically symmetrical distribution of matter, the author develops the theory begun in his earlier paper (see this Zbl. 5, 270) by finding a law of cosmic time and the periods of revolution, anomalistic and sidereal, of an Einsteinian motion in the ordinary Euclidean space.

*H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Zaycoff, Rascheo:** Zur relativistischen Kosmogonie. Z. Astrophys. 6, 128—137 (1933).

Verschiedene Bemerkungen über die nichtstatischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen.

*Heckmann (Göttingen).*

**Press, A.:** The Kaufmann-Bucherer experiments and a classical Einsteinian mass formula. Philos. Mag., VII. s. 14, 758—764 (1932).

Von den Heavisideschen Untersuchungen über die Bewegung des Elektrons ausgehend, versucht der Verf. die Hypothese, daß sich nicht die Gestalt des Elektrons ändert, sondern die Ladungsverteilung und die Gesamtladung. Die von der Ladung ausgehende dielektrische Verschiebung wird dadurch geändert, daß ihre in die Bewegungsrichtung fallende Komponente sich im Verhältnis  $v^2/c^2$  verringert. Bei den Kaufmann-Buchererschen Versuchen zeigt sich daher nach Ansicht des Verf. nicht eine Zunahme der Masse, sondern eine Abnahme der Ladung. Nach der angeführten Hypothese sollte diese  $q = q_0 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{v^2}{c^2}\right)$  sein. Er führt noch einen allgemeineren Ansatz  $q = q_0(1 - K v^2/c^2)$  ein, allerdings ohne Begründung, und findet für  $K = 0,58$  Übereinstimmung mit den Experimenten.

*Zerner (Wien).*

**Gianfranceschi, G.:** Sull'equazione einsteiniana per l'universo statico. Atti Pontif. Accad. Sci. Nuovi Lincei 85, 304—308 (1932).

By employing his concept of ether-space (spazio-etere) the author seeks to show how the cosmological constant can be dispensed with in a statical space-time of constant spatial curvature.

*H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Chatterjee, N. K.:** Note on the type of expanding universe recently proposed by Einstein and de Sitter. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 95—98 (1932).

Es werden — in Form von Ungleichungen — einige Eigenschaften der Funktion  $R(t)$  aufgestellt, die im von Einstein und de Sitter befürworteten Linienelement  $ds^2 = -R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2 dt^2$  der nichtstatischen Welt auftritt unter Voraussetzung der Feldgleichungen mit  $\lambda \geq 0$  und der Annahme positiven Druckes und positiver Dichte der Materie.

*Heckmann (Göttingen).*

**Swings, P.:** Sur les  $ds^2$  d'espace-temps contenant des termes en  $dt$ . Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 1, 216—219 (1932).

Es wird gezeigt, daß jede Metrik der Form

$$ds^2 = g_{11} dq_1^2 + 2g_{12} dq_1 dq_2 + g_{22} dq_2^2 + 2g_{13} dq_1 dt + 2g_{23} dq_2 dt + g_{33} dt^2,$$

wo die  $g_{ik}$  Funktionen von  $q_1, q_2, t$  sind, sich durch eine Substitution

$$q_1 = f(Q_1, t); \quad q_2 = g(Q_2, t)$$

reduzieren läßt auf eine Form, die  $dt$  nicht mehr linear enthält. Zu diesem Zwecke ist es nur notwendig, ein System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen.

*Heckmann (Göttingen).*

**Pauli, W., et J. Solomon:** La théorie unitaire d'Einstein et Mayer et les équations de Dirac. J. Physique Radium, VII. s. 3, 452—463 (1932).

Verff. untersuchen die Stellung der Diracschen Gleichung in der Einstein-Mayer-schen fünfdimensionalen Feldtheorie. Aus den Transformationseigenschaften der



Spinoren in so einem Raume gelingt es eindeutig, die Diracsche Gleichung aufzustellen und die Form des Stromvektors zu finden. Es zeigt sich dabei, daß die Erweiterung der Gleichung durch das Viererpotential ganz von selbst herauskommt, als Folge der geometrischen Eigenschaften der zugrunde gelegten Mannigfaltigkeit. Der Erhaltungssatz des Wahrscheinlichkeitsstromes bildet die fünfte Komponente der Impuls-Energie-Gleichung. Fernerhin bedingt das Gravitationsfeld das Auftreten von neuen Gliedern, die nicht dem Korrespondenzprinzip widersprechen, da sie mit  $\hbar$  gegen Null gehen. Ihre experimentelle Nachweisbarkeit scheint unwahrscheinlich, da sie der Gravitationskonstante proportional und darum verschwindend klein sind. In einer zusätzlichen Notiz wird auf den Unterschied hingewiesen zwischen der hier erhaltenen Formulierung der Diracschen Gleichung und der von Schouten und van Dantzig (vgl. dies. Zbl. 5, 90 u. 271) gegebenen. Der Hauptunterschied ist, daß in der Geometrie der letzteren Autoren 3 räumliche und 2 zeitliche Dimensionen vorkommen, während die Einstein-Mayersche Geometrie 4 räumliche und 1 zeitliche Dimension bedingt. *Lanczos*.

## Quantentheorie.

● **March, Arthur:** Einführung in die moderne Atomphysik in allgemeinverständlicher Darstellung. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1933. 115 S. u. 34 Abb. RM. 6.—.

**Morand, Max:** Sur les principes de la physique. I. mém. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 17, H. 4, 1—72 (1932).

L'auteur essaie de ramener les lois physiques à deux principes, relatifs l'un à la mesure, l'autre au „sens“ des phénomènes, et qu'il considère comme une généralisation des deux principes de la thermodynamique. En relation avec la notion d'irréversibilité, il énonce le second principe sous deux formes „complémentaires“; il affirme que cette complémentarité est identique à celle de Bohr. *L. Rosenfeld* (Liège).

**Bender, Wm.:** Physics and the method of coincidences. J. Franklin Inst. 214, 443—463 (1932).

Soweit der Referent entnehmen konnte, beabsichtigt der Autor der vorliegenden Abhandlung, der sinnesphysiologischen Tatsache, daß wir immer nur diskrete raumzeitliche Koinzidenzen beobachten und diesen Koinzidenzen auf unseren Maßstäben immer ganze oder rationale Zahlen zuordnen, einen Platz in der fundamentalen Formulierung aller physikalischen Sätze einzuräumen. Dieser bereits mehrfach geäußerten positivistischen Tendenz soll durch Einführung gewisser Ordnungseigenschaften des „Beobachtungsraumes“ genügt werden, zu deren Wiedergabe im einzelnen sich Ref. außerstande sieht. *Halpern* (New York).

**Majorana, Ettore:** Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario. Nuovo Cimento, N. s. 9, 335—344 (1932).

Verf. stellt ein relativistisch invariantes System von Wellengleichungen für Teilchen mit beliebigem Spin auf. Dieses System läßt sich nach dem Muster der Diracschen Theorie des Spinelektrons durch eine in den Energieimpulskomponenten lineare Gleichung mit Matrixkoeffizienten darstellen; im Gegensatz zur Diracschen Theorie treten jedoch hier unendliche Matrizen auf, wodurch die Forderung, daß die Ruhmasse stets positiv sein soll, befriedigt werden kann. Nur in dem Bezugssystem, wo das Teilchen ruht, hat der Spin einen scharfen, ganzen oder halbganzen Wert  $s$ ; die Ruhmasse ist mit  $(s + \frac{1}{2})$  umgekehrt proportional. Im Falle kleiner Geschwindigkeiten  $v$  sind nur die zu  $s$  gehörigen Komponenten  $\psi_{s,m}$  der Wellenfunktion wesentlich; sie genügen einer Schrödingergleichung mit dem Massenparameter  $\frac{m_0}{s + \frac{1}{2}}$ , während die

Komponenten  $\psi_{s+1,m}, \psi_{s+2,m}, \dots$  von der Größenordnung  $\frac{v}{c}, \left(\frac{v}{c}\right)^2, \dots$  sind. Durch Hinzufügen von Gliedern, die in invarianter Weise von den elektromagnetischen Feldstärken abhängen, kann erreicht werden, daß das magnetische Moment einen beliebigen Wert annimmt. Für  $s = \frac{1}{2}$  ergäbe z. B. die vorliegende Theorie ohne solche

Zusatzglieder das magnetische Moment  $\frac{1}{2} \mu_0$  anstatt  $-\mu_0$  ( $\mu_0$  = Bohrsches Magneton). Für  $s = 0$  liefert sie ein bequemes Näherungsverfahren zur Berechnung der relativistischen Effekte.

*L. Rosenfeld* (Lüttich).

**Donder, Th. de:** Application de la gravifique einsteinienne à l'électrodynamique des corps en mouvement. *Mém. Sci. math. Fasc. 58*, 1—58 (1932).

Mit dieser Monographie schließt Verf. seine früheren Darstellungen in den Heften 8, 14, 43 dieser Sammlung ab. Es werden die Elektrodynamik bewegter Körper, Elektromagnetostriktion, Strahlungsdruck, Hysterese, Thermodynamik vom relativistischen Standpunkt aus behandelt. Zum Schluß wird die Diracsche Wellenmechanik relativistisch verallgemeinert.

*Lanczos* (Lafayette).

**Kramers, H. A., C. C. Jonker und T. Koopmans:** Wigners Erweiterung des Thomas-Kuhnsechen Summensatzes für ein Elektron in einem Zentralfeld. *Z. Physik* **80**, 178 bis 182 (1933).

Die Verff. haben nicht bemerkt, daß bereits I. G. Kirkwood (vgl. dies. Zbl. **4**, 426) die Wignerschen Resultate in sehr eleganter Weise wiedergewonnen hat. Kirkwoods Idee ist im Grunde dieselbe wie die der drei Autoren; nämlich nach radialen Eigenfunktionen zu entwickeln. Die Methode ist, wie Kirkwood erkannt hat, nicht nur auf das hier zur Diskussion stehende Problem anwendbar. Neu gegenüber Kirkwoods Arbeit ist die Berechnung der Summe aller Oszillatorenstärken für das relativistische Einelektronenproblem. Dabei ergibt sich merkwürdigerweise der Wert Null; die Schuld an diesem rein mathematischen Resultat ist den Übergängen zu negativen Energien zuzuschreiben. Physikalische Bedeutung hat es nicht, denn für solche Übergänge haben die in üblicher Weise definierten Oszillatorenstärken nichts mehr mit der Ausstrahlung zu tun.

*Bechert* (München).

**Destouches, Jean-Louis:** Remarques sur la théorie de la superquantification. *C. R. Acad. Sci., Paris* **195**, 1374—1376 (1932).

L'auteur interprète dans la théorie de la superquantification les nombres  $n_s$  de systèmes quantiques dans l'état  $s$  comme coordonnées d'un point  $N$  de l'espace  $(A)$  de Fréchet où la distance de deux points  $X, Y$  est définie par  $(X, Y) = \sum_s |x_s - y_s|$ . Il traduit ensuite en langage géométrique certaines propriétés bien connues de la fonctionnelle  $\psi(N, t)$ .

*V. Fock* (Leningrad).

**Stahel, E., und H. Ketelaar:** Wechselwirkung von Gammastrahlen und Atomkernen. (113. Jahresvers., Thun, Sitzg. v. 6.—8. VIII. 1932.) *Verh. Schweiz. naturforsch. Ges.* **307**—308 (1932).

**Braunbek, Werner:** Beziehungen der empirischen Atom- und Ionenradien zu der Thomas-Fermischen Ladungsverteilung im Atom. *Z. Physik* **79**, 701—710 (1932).

Die Thomas-Fermi-Verteilung liefert für Atome eine ins Unendliche gehende Ladungswolke, also keinen definierten Atomradius; für positive Ionen kommt zwar ein endlicher Radius heraus, der aber nach der asymptotischen Berechnung von Sommerfeld (vgl. dies. Zbl. **5**, 231) etwa  $4,6 \text{ \AA}$  beträgt, also erstens viel zu groß ist und zweitens von  $Z$  in erster Näherung unabhängig ist, was ebenfalls der Erfahrung widerspricht. Verf. schlägt vor, den Radius so zu definieren, daß außerhalb einer Kugel mit dem Atom- oder Ionenradius eine von  $Z$  unabhängige Ladung  $ne$  liegt, wo  $n$  für die Homologen einer Vertikalreihe gleichgesetzt wird. Eine Begründung für diese Definition läßt sich nicht geben.  $n$  wird passend gewählt, dann stimmen die mit Hilfe der Sommerfeldschen Näherungsformeln gewonnenen Radien der Atome und Ionen der Alkalien und Erdalkalien ganz gut mit den aus der Kristallstruktur bekannten empirischen Radien überein.

*Bechert* (München).

**Stueckelberg, E. C. G.:** Theory of continuous absorption of oxygen at 1450 A. *Physic. Rev.*, **II**, s. **42**, 518—524 (1932).

Es wird die Frequenzabhängigkeit der kontinuierlichen Sauerstoffabsorption ( $\Sigma^3 \rightarrow \Sigma^3$ ) nach der Condonschen Methode berechnet.

*E. Teller* (Göttingen).



**Vinti, J. P.:** The dispersion and absorption of helium. *Physic. Rev.*, II. s. 42, 632—640 (1932).

Es werden die Beiträge der verschiedenen Absorptionslinien und der kontinuierlichen Absorption im Helium zur Dispersion (d. h. die  $f$ -Werte) des Heliums berechnet. Die Eigenfunktionen werden in der (Eckartschen) Form  $u(\gamma 1) u(\delta 2) + u(\gamma 2) u(\delta 1)$  angesetzt, wobei etwa  $u(\gamma 1)$  die Wasserstoffeigenfunktion des Elektrons 1 im Felde eines Kernes mit der effektiven Ladung  $\gamma$  bedeutet.  $\gamma$  und  $\delta$  werden mit Hilfe der Variationsmethode bestimmt. Der Beitrag des kontinuierlichen Spektrums ergibt sich aus dem  $f$ -Sommensatz. Die stärksten Beiträge zur Dispersion werden durch den  $1s - 2p$ -Übergang und durch das kontinuierliche Spektrum geliefert. *E. Teller* (Göttingen).

**Cabannes, Jean:** La symétrie des molécules et les spectres de diffusion. *Ann. Physique*, X. s. 18, 285—328 (1932).

Es wird der Ramaneffekt in mehratomigen Molekülen auf elementar-klassischer Grundlage behandelt. Zuerst wird das Zustandekommen der Rayleigh- und Ramanstreuung diskutiert, dann werden die Normalschwingungen eingeführt und nach ihrem Verhalten zu den Symmetrioperationen des Moleküls eingeteilt und schließlich die Auswahlregeln besprochen, die sich aus der Molekülsymmetrie für die Grundtöne ableiten lassen. *E. Teller* (Göttingen).

**Ganguli, A.:** Note on Raman effect. *Philos. Mag.*, VII. s. 15, 193—196 (1933).

Methode und Ergebnisse einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 3, 418) über das Intensitätsverhältnis der Stokesschen zu den Anti-Stokesschen Linien werden verbessert. *F. Hund* (Leipzig).

**Weisskopf, Viktor:** Die Breite der Spektrallinien in Gasen. *Physik. Z.* 34, 1—24 (1933).

(Zusammenfassendes Referat.) Es wird die Form der Spektrallinien in Gasen unter verschiedenen Bedingungen diskutiert. Auf die Linienform haben Einfluß: 1. Die Dämpfung der virtuellen Oszillatoren durch ihre eigene Strahlung. 2. Der Dopplereffekt. 3. Die Wechselwirkung der Atome. Im letzten Falle bekommt man die Lorentzsche Stoßdämpfung, wenn die Zusammenstöße selten erfolgen und mithin in erster Linie auf die Kohärenzlänge des Lichtes Einfluß haben. Wenn aber das strahlende Atom relativ lange Zeiten unter dem Einfluß anderer Atome steht, so wird die Verschiebung der Frequenzen im Kraftfeld der Nachbaratome wesentlich. Sind dabei die Nachbaratome gleichartig, so nennt man die durch sie hervorgerufene Verbreiterung die Kopplungsbreite. Es wird gezeigt, daß die Theorie der Kopplungsbreite aus der Diskussion der Lorentz-Lorenzschen Formel sich leicht ergibt, da diese der Wechselwirkung der in den verschiedenen gleichartigen Atomen induzierten Dipolmomente Rechnung trägt. Es werden auch die zwischen verschiedenartigen Atomen auftretenden Kräfte diskutiert, die teils von kleiner Reichweite sind und zur Stoßdämpfung Anlaß geben (Londonsche Polarisationskräfte, Überschneidung der Ladungswolken), teils auf größere Abstände wirken und Starkeffektverbreiterung zur Folge haben (Coulombsche Kräfte von Ionen, Dipolkräfte, Quadrupolkräfte). *E. Teller* (Göttingen).

**Petersen, H.:** Zur Theorie der Röntgenabsorption molekularer Gase. II. *Z. Physik* 80, 258—266 (1933).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 5, 39) entwickelt Verf. eine Methode, um die Feinstruktur in der Röntgenabsorption molekularer Gase auch in der Nähe der Hauptkanten, d. h. für kleine Geschwindigkeiten der beim Ionisationsprozeß herausgeworfenen Elektronen, berechnen zu können, wo sie gerade besonders ausgeprägt ist. Statt die hierbei benötigte Streuung der Elektronen an den Partnern des Atoms, dessen Röntgenabsorption bestimmt werden soll, aus der nur für hinreichend schnelle Teilchen gültigen Bornschen Stoßtheorie zu entnehmen, wird die von Faxén und Holtmark bei der Deutung des Ramsauer-Effekts benutzte Methode zugrunde gelegt. Die Endformel stellt dann das Verhältnis der Röntgenabsorption für das gebundene und das freie Atom als Funktion der Energie des herausgeworfenen Elektrons

und des Abstands der Kerne dar und enthält außer diesen Größen nur noch die Phasen der kugelförmigen Partialwellen, die in dem Faxén-Holtmarkschen Verfahren auftreten. Die Ergebnisse werden auf  $\text{Cl}_2$  angewandt und in Übereinstimmung mit älteren Messungen von Lindh gefunden. Die gemachten Vernachlässigungen werden besprochen

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Darrow, Karl K.: Contemporary advances in physics. XXV. High-frequency phenomena in gases. II.** Bell. Syst. Techn. J. **12**, 91—118 (1933).

**Onsager, Lars, and Raymond M. Fuoss: Irreversible processes in electrolytes. Diffusion, conductance, and viscous flow in arbitrary mixtures of strong electrolytes.** J. phys. Chem. **36**, 2689—2778 (1932).

Die Arbeit beschränkt sich konsequent auf die Ableitung und Diskussion der Grenzesetze der im Titel genannten Vorgänge, für welche die Quadratwurzel aus der Konzentration maßgebend ist. Da die Probleme der Diffusion und Leitfähigkeit zusammengehören, wird von vornherein die allgemeinste Ionenwanderung behandelt. Hieraus ergibt sich die Behandlung der Einzelprobleme durch Spezialisierung. In der Durchführung beschränkt sich die Theorie auf zeitlich konstantes (kleines) elektrisches Feld. Eine Verallgemeinerung auf Wechselfelder (Dispersionseffekt) ließe sich mit den angewandten Methoden aber ebenfalls durchführen. Die Theorie der Viskosität ist ebenfalls behandelt, da hierfür dieselben mathematischen Methoden anwendbar sind. — Die Behandlung der grundlegenden Differentialgleichungen, welche die in Rede stehenden Probleme beherrschen, wird durch Anwendung der Matrixalgebra auf die Behandlung einer einzigen Differentialgleichung für eine Matrix zurückgeführt. Hierdurch wird in eleganter Weise die Lösung für beliebig komplizierte Elektrolyte ermöglicht. — Als Ergebnis speziell für die Leitfähigkeit ergibt sich, daß das Kohlrauschsche Gesetz von der unabhängigen Wanderung der Ionen, das in binären Elektrolyten gültig ist, für Gemische nicht mehr erfüllt ist. Hierüber wird ein Vergleich mit experimentellen Daten durchgeführt. Die Ergebnisse für den Diffusionskoeffizienten werden ebenfalls mit den wenigen vorliegenden Daten verglichen. Schließlich wird gezeigt, wie sich unter Einführung einer „Dissipationsfunktion“ [s. zwei frühere Arbeiten von L. Onsager, Physic. Rev. **37**, 405 (1931); *ibid.* **38**, 2265 (1931); *dies. Zbl.* **1**, 95, u. **4**, 183] die Zunahme der Entropie bei den vorliegenden Vorgängen berechnen läßt, und wie unter Benutzung dieser Funktion die hier geltenden Gesetze sich formulieren und diskutieren lassen.

*E. Hückel* (Stuttgart).

**Sitte, Kurt: Untersuchungen über Diffusion in Flüssigkeiten. V. Zur Theorie der Diffusion in Lösungen starker Elektrolyte.** Z. Physik **79**, 320—344 (1932).

Die Konzentrationsabhängigkeit (Konz.  $c$ ) des Diffusionskoeffizienten  $D$  von Lösungen starker Elektrolyte kommt zustande: 1. Durch den Einfluß der Coulombschen Kräfte auf das chemische Potential des Elektrolyten (Änderung der „treibenden Kraft“). 2. Durch den Einfluß der Coulombschen Kräfte der ein Ion umgebenden Ladungswolke auf dessen Beweglichkeit. Dieser Einfluß wird berechnet auf Grund einer älteren Theorie von Born, wonach für die Beweglichkeit eines einzelnen Ions die Drehung der Wasserdipole mit maßgebend ist. Die Berechnung enthält die Voraussetzung: Richtenergie der Dipole  $\ll$  Energie der Temperaturbewegung. 3. Durch die Ionenassoziation. Über die Beweglichkeit assoziierter Ionen werden vereinfachende Annahmen gemacht. — Für kleine  $c$  ist nur 1. maßgebend. Die Verminderung von  $D$  ist  $\propto \sqrt{c}$  (Grenzesetz); der theoretische Faktor stimmt (für einwertige Elektrolyte) gut mit dem Experiment. Für höhere  $c$  bewirken 2. und 3. Abweichungen. Es wird versucht, aus diesen auf den Assoziationsgrad zu schließen. [Nicht berücksichtigt wird der Einfluß der elektrophoretischen Kräfte. S. die neuere Theorie von L. Onsager. Z. physik. Chem. **36**, 2689—2778 (1932); vgl. vorst. Referat. Ref.]

*E. Hückel.*

**Evans, R. C.: The equilibrium of atoms and ions adsorbed on a metal surface.** Proc. Cambridge Philos. Soc. **29**, 161—164 (1933).



**Brillouin, L.:** Les électrons libres dans un réseau cristallin. Équation ondulatoire et propriétés magnétiques. *J. Physique Radium*, VII. s. 3, 565—581 (1932).

In dem Modell, das von den Eigenfunktionen der einzelnen Elektronen in einem festen Kraftfeld ausgeht, wird untersucht, welchen Einfluß die Wechselwirkung der Elektronen auf Energie und magnetische Eigenschaften hat. Die Rechnungen werden nur für den schon von F. Bloch behandelten Grenzfall freier Elektronen durchgeführt. Zu dem Blochschen Ergebnis wird noch ein Korrektionsglied berechnet (mit Methoden, die der Verf. früher angegeben hat, vgl. dies. Zbl. 5, 329); es zeigt sich, daß dieses keine praktische Bedeutung hat. Die Diskussion des aus der Rechnung folgenden magnetischen Verhaltens zeigt recht paradoxe Züge. Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß die Berücksichtigung der Gitterstruktur des Kraftfeldes die Rechnung ganz wesentlich abändern würde.

*F. Hund* (Leipzig).

**Bridgman, P. W.:** The effect of homogeneous mechanical stress on the electrical resistance of crystals. *Physic. Rev.*, II. s. 42, 858—863 (1932).

In einem durch äußere mechanische Spannungen deformierten Einkristall ist der Stromvektor eine Funktion der Feldstärke und ihrer Richtung sowie des Spannungstensors. Das Problem, die allgemeinste, mit der Kristallsymmetrie verträgliche Form dieser Abhängigkeit zu finden, wird durch geometrische Analogie auf die Bestimmung der allgemeinst möglichen Abhängigkeit der elastischen Deformation von den Spannungen zurückgeführt. Als Beispiel wird der Fall von Wismut behandelt, in dem (sofern die Widerstandsänderung proportional zu den Spannungen ist) sechs Parameter auftreten. Vier von ihnen kann man durch die Wirkung eines longitudinalen Zuges auf den Widerstand geeignet geschnittener Kristallstäbchen bestimmen; für die anderen zwei muß man Messungen mit allseitigem Druck zu Hilfe nehmen. Die Formeln werden an Experimenten kontrolliert. Es wird darauf hingewiesen, daß in stromführenden Einkristallen unter Druck quergerichtete Potentialdifferenzen auftreten, etwa so wie im Fall des Halleffekts an isotropen Metallen.

*R. Peierls* (Rom).

**Kroll, Wolfgang:** Zur Theorie der thermoelektrischen Effekte bei tiefen Temperaturen. *Z. Physik* 80, 50—56 (1933).

Die Thermokraft zwischen zwei Metallen wird nach der Methode von Bloch für tiefe Temperaturen ( $T \ll \theta$ ) berechnet. Es ergibt sich derselbe Ausdruck wie nach dem elementaren Modell von Sommerfeld; er unterscheidet sich jedoch von dem aus der Blochschen Methode für hohe Temperaturen folgenden durch einen Zahlfaktor. Der Übergang zwischen beiden wird durch Abschätzung des ersten Gliedes in der Entwicklung nach Potenzen von  $T/\theta$  illustriert.

*R. Peierls* (Rom).

**Bozorth, Richard M.:** The theory of the ferromagnetic anisotropy of single crystals. *Physic. Rev.*, II. s. 42, 882—892 (1932).

**Nedelsky, Leo:** Radiation from slow electrons. *Physic. Rev.*, II. s. 42, 641—665 (1932).

Es wird die Intensität der Bremsstrahlung von Elektronen berechnet, die mit einem aus einem positiven Kern und einer negativ geladenen Kugelschale bestehenden Modell eines neutralen Atoms zusammenstoßen. Während für Energien der einfallenden Elektronen, die groß sind, verglichen mit der Ionisierungsenergie eines *K*-Elektrons im Feld des Atomkerns, die Kugelschale ohne merklichen Einfluß ist, ergeben sich für kleinere Geschwindigkeiten charakteristische Abweichungen von der bekannten Kramerschen Formel, deren Gültigkeit für einen leeren Atomkern auch aus der neueren Quantenmechanik folgt. Um zu zeigen, daß die Ergebnisse von dem speziellen Atommodell weitgehend unabhängig sind, wird außerdem ein aus zwei Schalen und einem Kern bestehendes Atom betrachtet. Auch für die Strahlung von Protonen wird ein Ausdruck abgeleitet.

*O. Klein* (Stockholm).

**Stueckelberg, E. C. G.:** Theorie der unelastischen Stöße zwischen Atomen. *Helv. physica Acta* 5, 369—422 (1932).

Eine dem Wentzel-Kramers-Brillouinschen Verfahren entsprechende Anschlußmethode für zwei gekoppelte Differentialgleichungen wird gegeben und auf die

Stöße zweiter Art zwischen Atomen angewandt. Der Fall, wo die für die elastische Bewegung maßgebenden potentiellen Energiekurven in nullter Näherung (Vernachlässigung des für die Übergänge verantwortlichen Wechselwirkungsenergie der Elektronenzustände) einander nicht schneiden, ist verantwortlich für die Wirkungsquerschnitte bei Stößen zweiter Art. Der Fall, wo sich jene Energiekurven bei reellen Geschwindigkeiten schneiden, dürfte doch von Bedeutung sein bei Stößen von positiven Ionen und Atomen. Es wird die Beziehung des neuen Verfahrens zum Störungsverfahren untersucht und gefunden, daß das letztere in gewissen Fällen als Ersatz dienen kann. Als weitere Anwendungsmöglichkeiten werden Prädissoziation und evtl. die Vorgänge beim Zusammenstoß von  $\alpha$ -Teilchen und Atomkernen angegeben. *Waller* (Upsala).

**Massey, H. S. W., and C. B. O. Mohr:** *The collision of slow electrons with atoms. II. General theory and inelastic collisions.* Proc. Roy. Soc. London A **139**, 187—201 (1933).

Eine frühere, von den Verff. gegebene Behandlung des Problems der Stöße von langsamen Elektronen mit Atomen wird erweitert, um neben dem früher berücksichtigten Austauscheffekt auch die Veränderung der einfallenden und gestreuten Elektronenwelle durch das statische Feld des Atoms zu berücksichtigen. Die Theorie wird zur Berechnung der Streuung durch Heliumatome bei Anregung von  $2^1P$  und  $2^3P$  Zustände benutzt. Die neue Theorie ergibt keine sehr wesentliche Veränderung der Kurven für die unelastischen Wirkungsquerschnitte. Als Grund für die bei sehr kleinen Geschwindigkeiten noch auftretenden Abweichungen von den experimentellen Werten wird insbesondere der Polarisierungseffekt angegeben. Nach der Theorie werden die beobachteten Diffraktionseffekte bei der Streuung durch schwere Atome gedeutet (I. vgl. dies. Zbl. **4**, 331).

**Williams, E. J.:** *Applications of the method of impact parameter in collisions.* Proc. Roy. Soc. London A **139**, 163—186 (1933).

Die klassische Behandlung des Stoßes zwischen einem Atom und einem Elektron ist gegenüber der wellenmechanischen bekanntlich charakterisiert durch die Rolle, die der senkrechte Abstand des Kerns von der Anfangsrichtung der Geschwindigkeit des Elektrons als „Stoßparameter“ ( $p$ ) spielt. Man kann diesen Parameter auch in der Wellenmechanik mit Vorteil einführen, wenn der Stoß „leicht“ ist, d. h. wenn der übertragene Impuls klein ist gegenüber dem der stoßenden Partikel. Dies ist besonders dann der Fall, wenn der Stoß kurz (gegen eine reziproke Eigenfrequenz des Atoms) oder wenn  $p$  so groß ist, daß die störende Kraft über das Atom hin als räumlich konstant angesehen werden kann. Verf. entwickelt hierüber einige einfache Theoreme und diskutiert damit die Bremstheorie von Bohr (1913) und die von Fermi (1924), bei der das Feld des stoßenden Teilchens in harmonische Wellen aufgelöst wird, vom Standpunkte der Quantenmechanik. Die Methode ist besonders geeignet zur Erklärung des Zustandekommens eines Wirkungsradius ( $\varrho$ ) größer als die Atomdimensionen. Verf. zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Energieübertragung im Gegensatz zu der Schrödinger-Funktion nur mit einer Potenz von  $p$  geht, und zwar bis  $p \propto \varrho$  wie  $p^{-2}$ , für  $p \gg \varrho$  wie  $p^{-4}$ . Außerdem wird die Relativitätsstörung behandelt, über deren physikalische Wirksamkeit man sich auf diese Weise im einzelnen Rechenschaft geben kann, und die Korrektur für die erste Ionisation und den Energieverlust bei leichten Stößen angegeben, letzterer in Übereinstimmung mit Bethe und Møller.

*W. Wessel* (Coimbra).

## Klassische Optik.

**Born, Max:** *Geometrische und undulatorische Abbildungsfehler der optischen Instrumente.* Naturwiss. **1932**, 921—923.

Der Verf. geht von dem Verfahren P. Debyes (Ann. Phys. **1909**) aus und wendet es auf den Fall an, daß die Abbildung nicht fehlerfrei ist. Für die Fehlertheorie hat er die Form von K. Schwarzschild (Ann. Mitt. d. Sternw. Gött. **1905**) gewählt. Die



Formeln werden nicht mitgeteilt, sondern nur darauf hingewiesen, daß in ihnen nur die 1. und die 2. Besselsche Funktion vorkommen. — Die Fehler sind in zwei Gruppen zu teilen; einerseits die beiden Bildfeldwölbungen und die Verzeichnung, andererseits die sphärische Abweichung und die Koma. Sind nur die Fehler der ersten Gruppe vorhanden, so sind die Kurven gleicher Helligkeit Ellipsen, die aber nicht den Gaußischen Bildpunkt, sondern einen in sagittaler Richtung abweichenden Punkt zum Mittelpunkt haben. Die beiden letzten Fehler führen eine von der Lage des Dingpunktes unabhängige Änderung der Beugungsfunktion und außerdem eine mit dem Abstände von der Achse zunehmende Asymmetrie ein. Für einen Achsenpunkt wird die Helligkeitsverteilung zeichnerisch dargestellt; für eine gewisse Größe der Abweichungen ist die Helligkeit am Gaußischen Bildpunkte kein Maximum, sondern ein flaches Minimum.

*Hans Boegehold (Jena).*

**Frank, Philipp: Lichtstrahlen und Wellenflächen in allgemein anisotropen Körpern.** Z. Physik **80**, 4—18 (1933).

Der Verf. verallgemeinert ein Verfahren von A. Sommerfeld und I. Runge [Ann. Physik **35** (1911)] und A. Rothe (Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **1912**). Im einzelnen ist die Franksche Arbeit der Ausbau von Gedanken, die M. Herzberger in einem Vortrage auf der Mathematiker- und Physikertagung in Elster geäußert hat. Ausgegangen wird von dem Fermatschen Satz. Man nenne den Vektor eines Raumpunktes  $\mathbf{r}$ , die Koordinaten  $x, y, z$ ; eine Kurve sei gekennzeichnet durch  $x = x(u)$  usw.;  $x' = \frac{dx}{du}$ .

Ferner sei  $\bar{\mathbf{s}}$  ein Einheitsvektor, so kann man das Brechungsverhältnis allgemein mit  $\mu(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}})$  bezeichnen. Setzt man dann  $F(x, y, z; x', y', z') = \mu(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}}) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ , so sagt der Fermatsche Satz, daß die gegebene Kurve ein Lichtstrahl ist, wenn man  $\delta S = \delta \int F(x, y, z; x', y', z') du = 0$  hat. Diese Gleichung fordert die Erfüllung der Eulerschen Differentialgleichungen, in denen die Differentialquotienten  $\frac{\partial F}{\partial x'}$  usw. vorkommen. Es wird nun ein Vektor mit den Komponenten  $\frac{\partial F}{\partial x'}$  eingeführt; er wird mit

$\mathbf{n}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}}) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}}) = \nabla_{\mathbf{v}} F$  (Nabla) bezeichnet, Herzberger nennt ihn den Normalenvektor, Frank den zugeordneten Vektor. Es besteht die Gleichung  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}}) = \mu \bar{\mathbf{s}} + V^* \mu$ ;  $V^*$  ist ein Vektor, der auf  $\bar{\mathbf{s}}$  senkrecht steht und beim isotropen Mittel verschwindet. Aus den Eulerschen Gleichungen läßt sich nun die Bedingung ableiten, daß eine Kurvenschar aus Lichtstrahlen besteht. Ist die Gleichung der Schar  $\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r})$ , und nennt man  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$  die Funktion, die entsteht, wenn man  $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r})$  in  $\mathbf{p}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{s}})$  einsetzt, so lautet die Bedingung  $\text{rot } \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \times \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = 0$ , was für das homogen-isotrope Mittel in  $(\text{rot } \bar{\mathbf{s}} \times \bar{\mathbf{s}}) = 0$  übergeht. Ein Sonderfall ist  $\text{rot } \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = 0$ ; in diesen Fällen handelt es sich um ein Normalenbündel, und es läßt sich leicht der Satz von Malus beweisen. Die physikalische Bedeutung von  $\mathbf{n}$  ist folgende: Ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum,  $v = c/\mu$  die Geschwindigkeit als Funktion von Ort und Richtung,  $w = v \cdot (\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{n}}) = v \cdot \cos(\bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{n}})$ , so wird  $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{n}} c/w$  ( $\bar{\mathbf{n}}$  Einheitsvektor).  $w$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen fortpflanzen, die Wellengeschwindigkeit. F. zeigt nun, daß, wenn eine Wellenfläche  $S(\mathbf{r}) = S_0 = \text{konst.}$  gegeben ist, die Fortpflanzungsrichtung  $\bar{\mathbf{s}}$  in jedem ihrer Punkte, damit auch die Schar der Wellenflächen durch die Bedingung bestimmt werden kann, daß die Wellengeschwindigkeit ein Maximum ist. F. gibt dann noch die Herleitung der Eikonalgleichung und wendet seine Grundsätze auf die Trennungsfläche zweier Mittel, auf einachsige Kristalle, endlich auf die Optik bewegter Mittel an.

*Hans Boegehold (Jena).*

**Picht, Johannes: Beiträge zur Theorie der geometrischen Elektronenoptik.** Ann. Physik, V. F. **15**, 926—964 (1932).

Der Verf. untersucht theoretisch die 1932 in mehreren Arbeiten durch Versuche festgestellte Tatsache, daß auf Elektronenstrahlenbündel die Gesetze der geometrischen Optik angewandt werden können. Die Elektronen durchlaufen zwischen Kathode und Anode die Spannung  $E$ . Dadurch ist ihre Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  bestimmt.

Es kann dann ein festes Potential  $\Phi_0$  (der Dingraum) folgen, darauf ein Potentialgefälle, das symmetrisch um eine Achse verteilt ist und das daher  $\varphi = \varphi(\varrho, z)$  geschrieben werden kann, endlich wieder ein festes Potential  $\Phi_1$ , der Bildraum. Die Strecke wirkt dann als „elektrische Linse“, in der Optik würde ihr eine Linse mit veränderlichem Brechungsverhältnis entsprechen. Die Potentialfunktion  $\varphi$  muß der Laplaceschen Gleichung genügen, und daraus folgt, daß  $\varphi(\varrho, z)$  sich durch das Potential  $\Phi(0, z)$  auf der Achse darstellen läßt, und zwar in der Form:

$$\varphi(\varrho, z) = \Phi(z) - \frac{1}{4} \varrho^2 \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \frac{1}{64} \varrho^4 \frac{d^4 \Phi}{dz^4} \dots$$

(statt  $\frac{1}{64}$  steht bei Picht wohl irrtümlich  $\frac{1}{32}$ ).

Setzt man in die allgemeinen Gleichungen für die Elektronenbeschleunigung ein, so kommt man zu Funktionalgleichungen zwischen  $\Phi(z)$  und  $\varrho = \varrho(z)$ . Die Glieder der Entwicklung für  $\varphi(\varrho, z)$  vom dritten ab wirken nur auf die „sphärische Abweichung“, die achsennahen Elektronenbahnen werden durch die beiden ersten Glieder bestimmt. Für achsennahe Bahnen erhält P. die Differentialgleichung:

$$2(E - \Phi(z)) \left/ \frac{d^2 \varrho}{dz^2} - \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{d\varrho}{dz} - \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right. = 0.$$

Die Gleichung läßt sich für gegebenes  $\Phi(z)$  durch Reihenentwicklung lösen, wobei zwei Konstante übrig bleiben, sie werden durch den Ausgangspunkt und die Richtung im Dingraum bestimmt. Aus der Differentialgleichung lassen sich aber auch für den Verlauf dünner Elektronenbündel, die von achsennahen Dingpunkten ausgehen (fadenförmiger Raum um die Achse), Gesetze ableiten, die ganz denen der Optik entsprechen, insbesondere die Begriffe Brennpunkt, Hauptpunkt, Knotenpunkt, Brennweite festlegen. Dem Brechungsverhältnis entspricht innerhalb der „Linse“ eine veränderliche Größe,  $\sqrt{E - \Phi}$ . P. behandelt die Abbildung noch genauer, wobei er auf die Ähnlichkeit mit A. Gullstrands Ableitung für heterogene Mittel (Svenska Vetensk. akad. Hdl. 1908) hinweist. Er löst auch (§ 15) die umgekehrte Aufgabe, die zu einer gegebenen Abbildung gehörende Potentialverteilung zu bestimmen. *Hans Boegehold (Jena).*

**Schulz, H. R.: Geometrische Optik asphärischer Flächen.** Z. Physik 79, 843 bis 851 (1932).

In der technischen Optik ist es in einzelnen Fällen erforderlich, sog. asphärische Flächen zu benutzen. Da diese Flächen eine möglichst geringe Zahl von Parametern besitzen und sich außerdem leicht herstellen lassen sollen, Rotationsflächen von Kegelschnitten aber nicht ausreichen, so werden in der Arbeit einige zeichnerisch leicht herstellbare Kurven — als Schnittkurven der rotationssymmetrischen asphärischen Flächen mit einer durch die Rotationsachse gehenden Ebene — angegeben. Sie beruhen auf einer Erweiterung der Parabelkonstruktion, indem man an Stelle der Leitlinie oder der Scheiteltangente Kegelschnitte wählt. Es ergeben sich so folgende Kurvengleichungen:

$$\begin{aligned} x - a &= \frac{y^2 (a - \sqrt{r^2 - y^2})}{(b - \sqrt{r^2 - y^2})^2}, \\ x - a &= \frac{y^2 q (a q - p \sqrt{q^2 - y^2})}{(b q - p \sqrt{q^2 - y^2})^2}, \\ x - a &= \frac{2 p y^2 (2 p a - y^2)}{(y^2 - 2 p b)^2}. \end{aligned}$$

Für den Krümmungsradius  $R_0$  im Scheitel ergeben sich die Werte

$$R_0 = -\frac{(b-r)^2}{2(a-r)}; \quad R_0 = \frac{(b-p)^2}{2(a-p)}; \quad R_0 = -\frac{b^2}{2a}.$$

Es werden noch andere Kurven diskutiert. — Um die Brechung in geschichteten Medien bzw. in Medien mit örtlich kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex zu behandeln, wird eine andere Gruppe von Flächen diskutiert. — Zum Schluß wird eine [auch vom Referenten in einer kürzlich erschienenen Arbeit (vgl. das vorstehende Referat)



abgeleitete] Formel für den paraxialen Strahlenverlauf in einem Medium mit örtlich kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex angegeben. *Picht* (Berlin).

**Geršun, A. A.: Berechnung des Volumleuchtens.** *Physik. Z. Sowjetunion* 2, 149 bis 185 (1932).

Der Verf. leitet in elementarer Weise die wichtigsten photometrischen Größen für ein gleichmäßig leuchtendes Volumen (z. B. Gasentladung) ab. Er setzt voraus, daß die Emission aller Volumteilchen nach allen Richtungen gleichmäßig sei (charakterisiert durch die Strahlungsintensität  $\varphi$ ), ebenso der Absorptionskoeffizient  $k$ ; charakteristisch ist dann die Größe  $\mu = \varphi/k$ , die als Leuchtdichte aufgefaßt werden kann; von der Streuung des Lichtes im Innern des leuchtenden Volums wird abgesehen. Ein homogen leuchtendes Volumen liefert dann in einer Richtung, in welcher das Volumen die Länge  $l$  hat, eine Lichtstärke pro normale Flächeneinheit  $= \mu(i - e^{-kl}) = B = \text{Leuchtdichte}$  (Formel von Lommel), woraus sich die spezifische Lichtausstrahlung  $R$  und der Lichtstrom berechnen lassen. Die Lichtwirkung dieses leuchtenden Volumens ergibt die Beleuchtungsstärke, die vom Verf. durch einen „Lichtvektor“ dargestellt wird. — Er faßt seine Resultate in 2 Sätzen zusammen, von denen der erste, allgemeinere lautet: Das von einem Volumleuchten erzeugte Lichtfeld kann man als die „Differenz“ zwischen den Lichtfeldern betrachten, welche die äußere und die innere Seite der das strahlende Volumen einschließenden Fläche erzeugen würden, wenn die Leuchtdichte der beiden Seiten in allen Punkten und nach allen Richtungen dieselbe und der Leuchtdichte der Strahlung gleich wäre. — Die gewonnenen Formeln und Sätze werden zur Berechnung der Lichtstärkeverteilung einer ebenen Schicht, einer Kugel und eines geraden Kreiszylinders verwendet. Die Resultate sind in Tabellen und Figuren dargestellt. Für die technisch wichtige Zylinderform ist ein besonderes Nomogramm beigelegt.

*P. Gruner* (Bern).

**Gruner, P.: Anwendung der Optik trüber Medien. III. Beleuchtung inhomogener, gekrümmter Schichten. Theorie des Purpurlichtes.** *Helv. physica Acta* 5, 351—361 (1932).

Während im 1. Teil der „Anwendung der Optik trüber Medien“ Berechnungen der Verteilung der Himmelselligkeit im Sonnenvertikal für die ideale Atmosphäre durchgeführt und mit den entsprechenden Berechnungen von H. Kleinernt und K. R. Ramanathan verglichen wurden und der 2. Teil — wie vorher wieder unter Vernachlässigung mehrfacher Lichtzerstreuung — die Ableitung einfacher Ausdrücke der Helligkeitsverteilung am ganzen Himmel einmal für die ideale Atmosphäre und zum anderen für diejenige einer homogenen, dünnen Schicht der getrübbten Atmosphäre brachte, führt Gruner hier — unter den früheren Annahmen alleiniger Wirkung primärer Lichtzerstreuung paralleler Sonnenstrahlbündel (auch wieder die Refraktion vernachlässigt) die Rechnung für den Fall einer dickeren gekrümmten, inhomogenen, als Summe einzelner, für sich homogener, dünner Schichten aufgefaßten Schicht durch. Vorausgesetzt wird weiter, daß das einfallende Sonnenlicht inhomogen ist, so gedacht, daß es sich in einzelne, für sich homogene Strahlenbündel zerlegen läßt. Die vom Verf. gefundenen Formeln finden weiter Anwendung auf das Problem des Purpurlichtes, indem Gruner von der Annahme ausgeht, daß die auf eine inhomogene Schicht trübender Teilchen fallenden Sonnenstrahlen auf ihrem Weg durch die Atmosphäre, auch schon unterm Horizont, eine starke, ein starkes Überwiegen langwelliger Strahlung herbeiführende selektive Auslöschung erfahren haben, bevor sie in der Schicht eine als Beugungswirkung im weitesten Sinne aufgefaßte Zerstreungswirkung ausüben. Gruner zeigt, wie die zeitlich-räumliche Entwicklung des Purpurlichtes, außer von den Dimensionen der Schicht von der wieder vom Zerstreungswinkel  $\varphi$  abhängigen Zerstreungsfunktion  $I'$  (vgl. dies. Zbl. 4, 429) abhängt und findet bei Durchrechnung eines Beispiels befriedigende Übereinstimmung mit der Beobachtung. *Chr. Jensen*.

**Horák, Z.: Sur la théorie de la réfraction astronomique.** *Astron. Nachr.* 247, 345—350 (1933).



## Geophysik.

● **Jordan, W.:** Handbuch der Vermessungskunde. Fortges. v. C. Reinhardt. Bd. 2. 2. Halbbd. Höhenmessungen, Tachymetrie, Photogrammetrie und Absteckungen. 9. erw. Aufl. bearb. v. O. Eggert. Stuttgart: J. B. Metzler 1933. X, 639 S. RM. 25.25.

Der 2. Halbband umfaßt die Verfahren der Vertikalaufnahme, der Tachymetrie und der Photogrammetrie; er bringt Anleitungen zu den für gewisse technische Vorarbeiten, insbesondere beim Eisenbahnbau, erforderlichen Vermessungen, ferner im Schlußkapitel eine geschichtlich gehaltene Übersicht über die Kataster- und Stadtvermessungen sowie über die topographischen Karten in den größeren deutschen Bundesstaaten. Nur im Kapitel über die barometrische Höhenmessung haben bei der Neuauflage keine größeren Veränderungen Platz gegriffen; wirklich beeinträchtigt es auch nicht die Güte des Buches, wenn einige neuere, oft dormalen noch nicht hinreichend erprobte Aneroidtypen keine Erwähnung finden. In allen übrigen Kapiteln ist den erreichten Fortschritten in den Aufnahmsarbeiten, bei der Berechnung und in der Instrumententechnik Rechnung getragen worden; zahlreiche Abbildungen sind durch neue ersetzt worden oder sind neu hinzugekommen. Die Ausführungen über den Einfluß der ellipsoidischen Erdgestalt auf die Nivellementergebnisse sind aus der vorangehenden Auflage unverändert übernommen worden; bei der Neuauflage des 3. Bandes wird es gewiß möglich sein, den Unterschied zwischen den Nivellementhöhen, orthometrischen (Seehöhen) und dynamischen Höhen scharf herauszuarbeiten. Auch könnte zur Betonung des grundsätzlichen Unterschiedes zwischen den geometrisch und trigonometrisch ermittelten Höhen vielleicht der Hinweis einen Platz finden, daß beiden Arten von Höhen verschiedene Bezugsflächen zugrunde liegen. Der Schwerpunkt der Neubearbeitung lag naturgemäß im Kapitel über die Photogrammetrie, das von 31 Seiten in der Auflage vom Jahre 1914 auf 147 Seiten in der Neuauflage angewachsen ist. Bei der ungeheuren Entwicklung dieses Zweiges der Vermessungstechnik in den letzten 20 Jahren könnte eine erschöpfende Darstellung des Stoffes in dem zur Verfügung gestandenen immerhin engen Raum eigentlich kaum erwartet werden; sie ist dennoch erreicht worden, so daß schon allein dadurch die Neuauflage zu einem unentbehrlichen Nachschlagwerk für den Vermessungsingenieur wird. Der Stoff dieses Kapitels ist nach der geschichtlichen Entwicklung angeordnet; der Meßtischphotogrammetrie folgt die terrestrische Stereophotogrammetrie und dieser die Photogrammetrie aus der Luft. Die Darlegungen gewinnen besonders in diesem Abschnitt durch zahlreiche, vielfach neue und überaus gelungene Abbildungen.

*Hopfner* (Wien).

**Malkin, N.:** Über die Formeln von Vening Meinesz, Callandreau und einige andere Formeln der höheren Geodäsie. Gerlands Beitr. Geophys. 38, 53—63 (1933).

Verf. gibt eine sehr einfache, kurze Ableitung der von F. A. Vening-Meinesz [A formula expressing the deflection of the Plumbline. Proc. Amsterdam Ac. 31, Nr 3 (1928)] angegebenen Formel für die meridionale Lotabweichung aus Schwereanomalien. Ferner wird eine entsprechende Formel für die in die Ost-West-Richtung fallende Komponente der Lotabweichung bekanntgegeben, für die Verf. eine entsprechend einfache Herleitung mitteilt. Ebenso leicht folgen Ausdrücke für die zweiten tangentiellen Ableitungen des Potentials der Schwerkraft. Verf. gibt weitere Formeln für die Schwere aus Lotabweichungen, für die radialen Gradienten der Schwere, für den mittleren Krümmungsradius des Geoids aus gegebenen Schwerewerten. Schließlich wird gezeigt, daß sich die von M. O. Callandreau [Sur la détermination du géoïde. Bull. Astr. 18, 211 (1901)] zur Ermittlung der Erdfigur aus Lotabweichungen angegebene Formel wesentlich vereinfachen läßt. Die erhaltenen Ergebnisse können fast unverändert auf die Gaußsche Theorie des Erdmagnetismus angewendet werden.

*Schmehl* (Potsdam).

**Malkin, N.:** Sur des intégrateurs de la gravitation suivant le relief des masses perturbatrices donné en horizontales. C. R. Acad. Sci. URSS A, Nr 13, 333—337 (1932) [Russisch].

**Berroth, A.:** Theorie einiger gravimetrischer Instrumente nach dem Prinzip der bifilaren Aufhängung. Z. Geophys. 8, 331—370 (1932).

**Slichter, L. B.:** The theory of the interpretation of seismic travel-time curves in horizontal structures. Physics 3, 273—295 (1932).

Der Verf. behandelt die Theorie der Deutung der seismischen Lauf-Zeit-Kurven für gebrochene Strahlen in Medien horizontaler Struktur. Die Behandlung geschieht in



Anlehnung an Herglotz-Wiechert mit Benutzung der Abelschen Integralgleichung, die hier ausgedehnt wird auf gebrochene Strahlen, wobei angenommen wird, daß die Strahlen nach den Gesetzen der geometrischen Optik gebrochen werden. Mehrwertige Lauf-Zeit-Kurven, diskontinuierliche Geschwindigkeitsfunktionen und diskontinuierliche Lauf-Zeit-Kurven erfordern eine spezielle Behandlung, lassen sich aber gleichfalls als Erweiterung der Herglotz-Wiechertschen Methode auffassen. Die experimentelle Definition der Lauf-Zeit-Daten ist indessen nicht immer ausreichend, um die Anforderungen der Theorie zu erfüllen.

*Picht* (Berlin-Lankwitz).

**Schmidt, Oswald v.:** Brechungsgesetz oder senkrechter Strahl? Eine kritische Studie auf Grund seismischer Arbeiten in Venezuela. Z. Geophys. 8, 376—396 (1932).

In der experimentellen Seismik ergab sich vielfach, daß die gefundenen Tiefen der Grenzflächen am besten mit den berechneten Tiefenwerten übereinstimmen, wenn man senkrechten Strahlenverlauf annimmt. Auch Beobachtungen über Emergenzwinkel sprechen scheinbar für diese Ansicht. Verf. untersucht nun die Gründe für und wider den Fermatschen Satz, um an Hand seiner Untersuchungen zu dem Schluß zu kommen, daß nur schräger Verlauf, also das Fermatsche Prinzip in Frage kommen. Die Gründe sind folgende: Die großen schon bei kleinen Sprengentfernungen auftretenden Emergenzwinkel sind bedingt durch die geringe Geschwindigkeit in den obersten Erdschichten. Die Vernachlässigung dieser oberen Schicht mit kleiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit führt auf falsche Laufzeitkurven, aus denen richtige Tiefen unter Annahme senkrechten Strahlenverlaufs sich ableiten, die zu der irrigen Folgerung geführt haben. Treten Verwerfungen derart auf, daß Schichten mit den Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  nebeneinander zu liegen kommen, und die  $v_2$ -Schicht von der  $v_1$  Schicht überlagert ist, so tritt als Laufzeitkurve zunächst eine Gerade für die  $v_1$  Schicht und eine Gerade für die  $v_2$  Schicht auf und erst um  $h \cdot \tan i$  hinter der Verwerfung beginnt ein Hyperbelzweig, der sich asymptotisch der  $v_2$  Geraden nähert. Geometrisch wird dargestellt, daß das Energiemaximum auf einen dem Grenzstrahl naheliegenden Strahlenbündel auf die Schicht 2 geworfen wird, hier als Grenzwelle geführt wird, um von hier wieder in einem solchen die Energie konzentrierenden Bündel den Seismographen zu treffen.

*Brockamp* (Kopenhagen).

**Tuwm, L.:** Théorie mathématique générale de l'effet tube-compteur vertical de la radiation cosmique. J. Physique Radium, VII. s. 3, 614—628 (1932).

Die vom Verf. bereits früher — S.-B. Preuß. Akad. Wiss. 1931, 91—106 u. 360—373; dies. Zbl. 1, 188 — aufgestellte Theorie des vertikalen Zählrohreffektes wird erneut entwickelt und durch Einführung einer neuen Konstanten, der spez. Ionisation  $\Delta$ , erweitert. Ferner wird der Einfluß des Gasdruckes und der Gasart auf die Zahl der Stromstöße erörtert und ein Vergleich mit der Ionisationskammer angestellt. Es ergibt sich u. a., daß mit einer Ionisationskammer immer die absorbierte Energie der kosmischen Strahlung gemessen wird, mit einem Zählrohr dagegen die auffallende oder absorbierte Energie, je nach dem ob der Gasdruck hoch oder gering ist. Der wesentliche Unterschied zwischen einem Zählrohr und einer Ionisationskammer verschwindet also bei geringen Gasdrücken im Zählrohr.

*J. N. Hummel* (Göttingen).

**Graziadei, Heinrich Th.:** Studie über die Methodik der Ionenzählung. Physik. Z. 34, 82—88 (1933).

Verf. findet, daß die von O. H. Gish [Gerlands Beitr. Geophys. 35, 1, (1932)] beschriebene Anordnung zur Unterdrückung des Gegenfeldeffekts bei der Auflademethode ausreicht, daß jedoch die bei dieser Anordnung gewählte Grenzbeweglichkeit noch etwas zu hoch ist, so daß bei Vorhandensein von intermediären Ionen die Zahl der leichten Ionen zu groß ausfallen kann. Die von P. A. Sheppard [Nature 129, 169 (1932)] gefundenen kurzperiodischen raschen Schwankungen des Ionengehaltes konnten weder in Stadtluft noch in reinster Gebirgsluft festgestellt werden.

*V. F. Hess.*

**Okada, T.:** On the hours of the beginning and ending of a rainfall. Geophys. Mag. 5, 293—299 (1932).